Permutation and Combination

+2 Level

Dr. Arnab Chakraborty

Associate Professor
Indian Statistical Institute, Kolkata

Formerly

Guest Faculty
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur

⋄

Guest Faculty
Ramakrishna Vivekananda University, Belur

⋄

Assistant Professor
St. Xavier's College, Kolkata

Levant Publications
18-B, Shyamacharan De Street
Kolkata 700 073

সূচী

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

হায়ার সেকেণ্ডারীর সময়টা পড়াশোনার জীবনে একটা সন্ধিক্ষণ। অতি অল্প সময়ের মধ্যে এক রাশ বিভিন্ন ধরণের পরীক্ষার ভীড়, এবং জীবনটা কোন খাতে বইবে তার অনেকটা ফয়সালা হয়ে যাবে এখানেই। তাই খালি একটা কোনো সিলেবাসের কথা মাথায় রেখে এগোলে চলে না। অথচ বইগুলো মোটেই এই কথাটা খেয়াল করে লেখা হয় না। একটা বিশাল মোটা বই হয়তো খালি একটা বোর্ডের একটা ক্লাসের জন্য, সেটা শেষ করাই প্রাণান্ত, এদিকে competitive পরীক্ষার বিশাল অংশের কোনো হদিশই নেই সেখানে। তার জন্য দশটা কোচিংএ হন্যে হয়ে দৌড়োনো, সেখানে আবার ধরে নেয় যে তুমি গোড়ার জিনিসগুলো সব শিখে জেনে বুঝে গুলে খেয়ে ফেলে তবে এসেছ। এত সব করেও competitive পরীক্ষার প্রশ্নগুলোর দিকে তাকিয়ে মনে হয়-- এ গুলো কোন যাদুমন্ত্রে কষতে হয় রে বাবা!

এই অসুবিধার প্রতিকার হিসেবেই আমরা একটা নতুন সিরিজ চালু করার কথা ভেবেছি--plus two level-এর জন্য। একেবারে গোড়ার কথা থেকে শুরু করে competitive পরীক্ষা পর্যন্ত। সহজ থেকে কঠিন, ধাপে ধাপে। এইটা তারই প্রথম বই।

হায়ার সেকেণ্ডারীর অংকের একটা সমস্যা হল এর মধ্যে একরাশ জিনিস মিশে আছে। সিলেবাসের বইতে এগুলোতে কৃত্রিমভাবে আলাদা করে বিভিন্ন অধ্যায়ে আলোচনা করা হয় বটে, কিন্তু বহু অংকেই বিভিন্ন অধ্যায়ের ধারণাগুলো একই সঙ্গে কাজে লাগে। সেগুলো এই সব কৃত্রিম অধ্যায়ে ভাগ করা বইয়ে কোথাওই খাপ খায় না বলে অলোচিতই হয়না। আমরা তাই এই বইতে permutation আর combination-কে প্রধান বিষয় রাখলেও, যখনই অন্যান্য ধারণার প্রয়োজন হবে অমনি সেটা আলোচনা করে নেব। তাতে permutation, combination-এরও বেশী প্রয়োগ শেখা যাবে, আর অন্যান্য ধারণাগুলো শেখার পথেও খানিকটা এগিয়ে থাকা যাবে।

এই বইটাকে আমরা day 1, day 2, ... এইভাবে এগারো দিনের পড়ায় ভাগ করেছি। এক দিনের পড়া বলে যতটা দিয়েছি, তার চেয়ে বেশী একদিনে করতে গেলে মাথা ঝিমঝিম করবে। প্রথম দশদিনের পড়া সকলের জন্যই। শেষের দিনে একটু কঠিন জিনিসপত্র আলোচনা করেছি।

বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। তাও কিছু ত্রুটি থেকে যাওয়া অসম্ভব নয়। কোনো ভুল চোখে পড়লে, বা অন্য কারণে যোগাযোগ করতে চাইলে `arnabc74@gmail.com` বা 9231542600 নম্বর (ফোনে বা Whatsapp) ব্যবহার করতে পারো।

আর এই ফাঁকে কৃতজ্ঞতা জানিয়ে রাখি তাদেরকে, যারা প্রথম সংস্করণের বিভিন্ন ভুলত্রুটি ধরতে সাহায্য করেছ, বিশেষ করে সৈকত, আবীর আর নির্বাণকে। তবে খুব তাড়াতাড়ি করে দ্বিতীয় সংস্করণটা বার করতে হল বলে সকলের সব পরামর্শ কার্যকর করা যায় নি। সেগুলো মুলতুবি থাক আগামী দিনের জন্য।

অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
চারটে মূল সূত্র

DAY 1
গুণের সূত্র (part 1)

1.1 গুণতে শেখা

এই বইয়ের প্রধান বিষয় বস্তু হল বিভিন্ন জিনিসের সংখ্যা গোণা। হঠাৎ মনে হতে পারে যে, সে তো ছোটোবেলাতেই শিখেছি, নতুন করে আবার কি শেখার আছে? ব্যাপারটা সত্যিই খুব কঠিন এমন নয়, কিন্তু একেক সময়ে গুণতে গিয়ে মাথা গুলিয়ে যায়। কয়েকটা কায়দা জানা থাকলে তখন খুব সুবিধা হয়। সেগুলো শেখানোই এই বইয়ের উদ্দেশ্য। এইসব কায়দাগুলোকে একসঙ্গে বলে combinatorics. বিভিন্ন প্রচলিত সিলেবাসের কথা মাথায় রেখে এই বইটার নাম Permutation and Combination দিয়েছি বটে, কিন্তু আসলে এটা একটা combinatorics-এর বই। Permutation আর combination হল combinatorics-এর দুটো হাতিয়ার মাত্র। তার বাইরেও আরও অনেক হাতিয়ার আমাদের শিখতে হবে, যেগুলো আমরা এখানে আলোচনা করব।
গুণতে গিয়ে মাথা কেমন গুলিয়ে যায় তার একটা উদাহরণ দেখি। কোনো বন্ধুকে চট্ করে এই প্রশ্নটার উত্তর দিতে বল--

> 100 থেকে শুরু করে 200 পর্যন্ত মোট কতগুলো integer আছে?

মনে রেখো integer মানে পূর্ণসংখ্যা, অর্থাৎ $100, 101, \ldots$ এইভাবে গুণতে গুণতে $199, 200$ অব্ধি গেলে কতগুলো সংখ্যা হবে? অনেকেই দেখবে অখেয়ালে $200 - 100 = 100$ উত্তর দিয়ে বসবে! আশা করি তুমি বুঝতে পারছ যে এই উত্তরটা ভুল। আমরা এখানে 100 থেকে 200 অব্ধি গোণার সময়ে 100 এবং 200 এই দুই প্রান্তের সংখ্যা দুটোও গুণছি। তাই উত্তর হবে $200 - 100 + 1 = 101$. একটা ছোটো উদাহরণ নিলে বুঝতে সুবিধা হবে। 5 থেকে 8 পর্যন্ত মোট কতগুলো integer আছে? উত্তর হল $8 - 5 + 1 = 4$. গুণে মিলিয়ে নাও-- $5, 6, 7, 8$, ঠিক চারটে সংখ্যাই হচ্ছে।
এই কায়দাটা পাছে গুলিয়ে যায় তাই সময় থাকতে গুছিয়ে লিখে রাখি।

THEOREM

For any two integers $m \leq n$ there are exactly $n - m + 1$ integers between them *both inclusive.*

ওই "both inclusive" কথাটা লক্ষ কর। ওখানেই বলা হল যে m, n এদেরকেও গোণার মধ্যে ধরা হচ্ছে। যদি বলত "both exclusive" তবে ওরা দুজনেই বাদ যেত, ফলে উত্তর হত $n - m + 1 - 2 = n - m - 1$.

Exercise 1: 50 থেকে 83 পর্যন্ত কতগুলো সংখ্যা আছে both inclusive? ■

বেশ সহজ জিনিস। কিন্তু একটু ঘুরিয়ে দিলে এটাই কেমন কঠিন দেখায় দ্যাখো। আমরা একটু আগেই দেখলাম যে 5 থেকে 8 অব্ধি মোট চারটে সংখ্যা আছে (both inclusive). এবার বল তো 5^2 থেকে 8^2-এর মধ্যে মোট কতগুলো square number (বর্গ সংখ্যা) আছে (both inclusive)? একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে উত্তর সেই চারই হবে। কারণ আগে আমরা গুণছিলাম $5, 6, 7, 8$-কে, আর এখন গুণছি ওদের square-দের।

Example 1: The number of perfect cubes among the first 4000 positive integers is

(A) 16 (B) 15 (C) 14 (D) 13

(BMath2010.7)

SOLUTION: প্রথমে এদের মধ্যে সবচেয়ে ছোটো আর সবচেয়ে বড় cube number দুটো বার করে নিই--

> The smallest cube number in this range is $1^3 = 1$.
>
> The largest cube number is $15^3 = 3375$.

এটা কি করে বার করলাম? $4000 = 4 \times 10^3$. সুতরাং এর cube root হবে $\sqrt[3]{4} \times 10$. এবার আমরা জানি যে 4-এর আগের cube number-টা হল $1^3 = 1$, আর পরের cube number-টা হল $2^3 = 8$. সুতরাং $\sqrt[3]{4}$ হবে 1 আর 2-এর মাঝামাঝি কোথাও একটা। তাকে 10 দিয়ে গুণ করছি, সুতরাং $\sqrt[3]{4000}$ হবে 10 থেকে 20-র মধ্যে কিছু একটা। এর মাঝামাঝি একটা কিছু সংখ্যা নিলাম, ধরো 15. এর cube করে পেলাম $15^3 = 3375$. সেটা ≤ 4000. সুতরাং এর পরের সংখ্যাটার (মানে 16-র) cube করে দেখি। সেটা এল $16^3 = 4096$, যেটা 4000-কে ছাড়িয়ে গেছে। সুতরাং সিদ্ধান্ত করলাম যে 15^3-ই হল সবচেয়ে বড় cube number যেটা ≤ 4000.

> So we are to count all the cube numbers of the form n^3 for $n = 1, ..., 15$.
>
> So the answer is $15 - 1 + 1 = 15$.

■

এবার তোমার পালা। নীচের অংকটার সমাধানের কাঠামোটা দিয়েই দিয়েছি, খালি তোমাকে শূন্যস্থানগুলো পূরণ করতে হবে। প্রতিটি শূন্যস্থানের $a, b, c,$ ইত্যাদি নাম দিয়েছি, যাতে উত্তর মেলাতে সুবিধা হয়। প্রতিটা শূন্যস্থানেই যে খালি সংখ্যা বসবে এমন নয়, কোনো ফর্মুলা যেমন "$4 \times 5 = 20$"-ও বসতে পারে।

Exercise 2: How many square numbers are there with exactly 5 digits?

HINT:

> In this range, the smallest square number is [a], and the largest square number is [b].
>
> So we are to count all the square numbers of the form n^2 for $n =$ [c], ..., [d].
>
> So the answer is [e].

■

এবার আরেকটা একইরকমের অংক। এখানে পুরোটাই তুমি নিজে নিজে করবে।

Exercise 3: Find the number of all square numbers from 100 to 3000, both exclusive. ■

নীচের অংকটাও একই সুরের।

Example 2: The number of multiples of 4 among all 10 digit numbers is

(A) 25×10^8 (B) 25×10^7 (C) 225×10^7 (D) 234×10^7

(BMath2010.10)

SOLUTION: এই অংকে খালি positive multiple-দের নিয়েই কাজ করতে হবে, যদিও সেটা আলাদা করে বলে দেয় নি।

এখানেও প্রথমে সবচেয়ে ছোটো আর সবচেয়ে বড় 10 digit-এর সংখ্যা দুটো বার করব যারা 4-র multiple (অর্থাৎ 4 দিয়ে ভাগ যায়)।

> The smallest 10 digit number is 10^9 and the largest 10 digit number is $10^{10} - 1$.
>
> In this range the smallest multiple of 4 is $10^9 = 4 \times 25 \times 10^7$.
>
> Also $10^{10} = 4 \times 25 \times 10^8$.
>
> So we want to count all numbers of the form $4n$ for n from 25×10^7 to $25 \times 10^8 - 1$.
>
> So the answer is
>
> $$(25 \times 10^8 - 1) - 25 \times 10^7 + 1 = 25 \times 10^7 \times (10 - 1) = 225 \times 10^7.$$

■

Exercise 4: What is the number of all multiples of 7 among numbers with exactly 5 digits?

HINT:

> The smallest 5 digit number is [a] and the largest 5 digit number is [b].
>
> In this range the smallest multiple of 7 is [c],and the largest is [d].
>
> So we want to count all numbers of the form $7n$ for n from [e] to [f].
>
> Hence the answer is [g].

■

Exercise 5: Find the number of multiples of 8 between 200 and 2000 both inclusive. ■

এবার একটা ছোট্টো গুগলি।

Exercise 6: How many nonzero square numbers are there that have *at most* 5 digits and are divisible by 3? ■

1.2 Multiplication principle

এবার আমরা চারটে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ কায়দা শিখব। বলা যেতে পারে যে, combinatorics বিষয়টার অধিকাংশই এই চারটে কায়দা জুড়ে জুড়ে তৈরী। এই চারজন হল

- addition principle বা যোগের কায়দা,
- subtraction principle বা বিয়োগের কায়দা,
- multiplication principle বা গুণের কায়দা,
- division principle বা ভাগের কায়দা।

এর মধ্যে সবচেয়ে বেশী কাজে আসবে multiplication principle-টা। সেইটার আলোচনা দিয়েই শুরু করি।

1.2.1 জিনিসটা কি?

Example 3: Fig 1-এর বাড়িটার ছাদ থেকে অনেকগুলো টালি ঝড়ে উড়ে গেছে। চট্ করে গুণে বলতে পারো কতগুলো টালি পড়ে আছে? টালিগুলো মেরামত করার পরে বাড়িটা দেখতে হয়েছে Fig 2-এর মত। এখন টালির সংখ্যা কত? কোন ক্ষেত্রে গুণতে বেশী সহজ হল? যদি তুমি একটা একটা করে ধরে গুণে থাকো, তবে দ্বিতীয়বার বেশী কষ্ট হয়েছে, কারণ দ্বিতীয় ছবিতে টালির সংখ্যা বেশী। কিন্তু একটা জিনিস লক্ষ করলে দ্বিতীয় ছবির বেলায় অনেক কম কষ্ট করেই মোট টালির সংখ্যা বলে দেওয়া যায়। জিনিসটা হল--দ্বিতীয় ছবিতে প্রতিটা লাইনেই ঠিক একই সংখ্যক টালি রয়েছে। সুতরাং খালি দেখে নিতে হবে কটা লাইন আছে (এক্ষেত্রে 5-টা) , তারপর দেখতে হবে প্রত্যেকটা লাইনে কটা করে টালি আছে (এক্ষেত্রে 7-টা করে)। সুতরাং মোট টালির সংখ্যা হল $5 \times 7 = 35$. প্রথম ছবির ক্ষেত্রে এই গুণ করার সুবিধাটা ছিল না। ■

অনেক সময়েই যখন কিছু গুণতে হয় তখন এই কায়দায় কাজ সংক্ষেপ করে নেওয়া যায়। আরেকটা উদাহরণ দেখি।

Example 4: Fig 3-এ গাছের ডালে কয়েকটা আম ঝুলে রয়েছে। কটা আম? প্রথম ডালে দুটো, দ্বিতীয় ডালে একটা আর তৃতীয় ডালে তিনটে। তার মানে মোট $2 + 1 + 3 = 6$-টা। অনেকগুলো ডাল থাকলে এইভাবে গোণা কঠিন। কিন্তু যদি প্রত্যেকটা ডালেই সমান সংখ্যক আম থাকত, তবে বার বার যোগ না করে একবারে গুণ করে দিলেই চলত। যেমন Fig

Fig 1

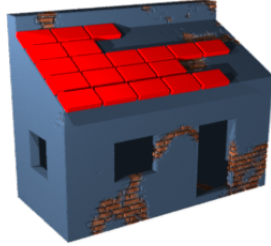



Fig 2

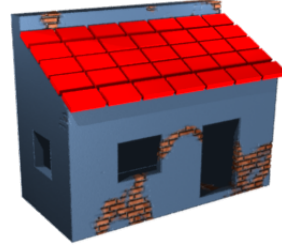
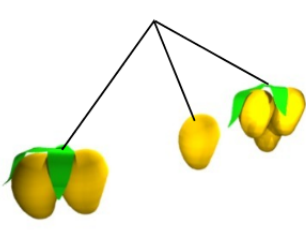
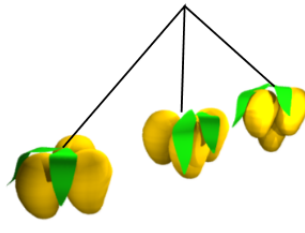
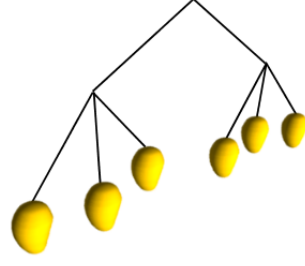



Fig 3 **Fig 4** **Fig 5**

4-র আমগাছটার 3-টে শাখার প্রত্যেকটায় 3-টে করে আম, মানে মোট $3 \times 3 = 9$-টা আম। এবারে Fig 5-এর একটা আম গাছ দ্যাখো যেখানে শাখার পরে আবার প্রশাখা আছে। কিন্তু 2-টো শাখার প্রত্যেকটা থেকেই ঠিক একই সংখ্যক প্রশাখা (3-টে করে), তাদের প্রত্যেকটা থেকে আবার একই সংখ্যক আম (1-টা করে) ঝুলে আছে। সুতরাং এখানেও আমের সংখ্যা গুণ করে বার করে দেওয়া যাবে, $2 \times 3 \times 1 = 6$-টা আম। ■

একেই বলে multiplication principle. ব্যাপারটা ভালো করে বোঝার জন্য লক্ষ কর আমরা কেমন ধাপে ধাপে এগোচ্ছি--

- টালির অংকে--
  - প্রথম ধাপে গুণলাম কটা লাইন আছে,
  - আর দ্বিতীয় ধাপে গুণলাম প্রতি লাইনে কটা টালি।
- Fig 4-এর উদাহরণে--
  - প্রথম ধাপে গুণলাম কটা শাখা,
  - আর দ্বিতীয় ধাপে গুণলাম প্রতি শাখায় কটা করে আম।
- Fig 4-এর উদাহরণে ছিল তিনটে ধাপ--
  - প্রথম ধাপে গুণলাম কটা শাখা,
  - দ্বিতীয় ধাপে গুণলাম প্রত্যেকটা শাখার কটা করে প্রশাখা,
  - আর তৃতীয় ধাপে গুণলাম প্রত্যেকটা প্রশাখায় কটা করে আম।

গুণ করার কায়দাটা সবক্ষেত্রেই যে কাজ করছে কারণ প্রত্যেকটা ধাপের উত্তর তার আগে ধাপের উপর নির্ভর করছে না। প্রতিটা লাইনে সমান সংখ্যক টালি, প্রতিটা শাখার সমান সংখ্যক প্রশাখা, প্রতিটা প্রশাখায় সমান সংখ্যক আম, ইত্যাদি। চাইলে আমরা ধাপের সংখ্যা আরও বাড়াতে পারতাম, শাখা থেকে প্রশাখা, প্রশাখা থেকে প্র-প্রশাখা, তার থেকে আবার প্র-প্র-প্রশাখা, ইত্যাদি। খালি একটা শর্ত পালিত হলেই আমাদের কায়দাটা খাটবে, প্রতিটি শাখা থেকে সমান সংখ্যক প্রশাখা, প্রতিটি প্রশাখা থেকে সমান সংখ্যক প্র-প্রশাখা, এইরকমটা হওয়া চাই।
বহু অংক আছে যেগুলোকে এইরকমভাবে ধাপে ধাপে ভেঙে করা যায়, অথচ কায়দাটা জানা না থাকলে ধাপগুলো খুঁজে পাওয়া কঠিন। সেরকম কয়েকটা উদাহরণ দেখি।

Example 5: আমার কাছে তিনটে বই আছে--লাল, নীল আর সবুজ। Fig 6 দ্যাখো। আমি ওদের একটা তাকের উপর

পাশাপাশি সাজিয়ে রাখতে চাই। যেটাকে খুশি যেখানে রাখতে পারো, খালি যেন নীল বইটা কোনো এক প্রান্তে থাকে। মানে Fig 7-এর মত রাখলে চলবে না, কিন্তু Fig 8-এর মত রাখলে আপত্তি নেই। প্রশ্ন হল মোট কতভাবে রাখা সম্ভব?
SOLUTION: আমরা ধাপে ধাপে এগোব। ধাপগুলোর বর্ণনা পড়ার সময়ে Fig 9-এর দিকে চোখ রেখো।

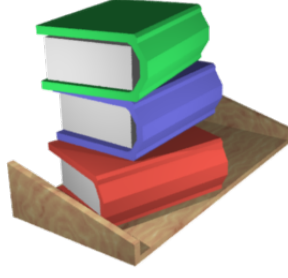
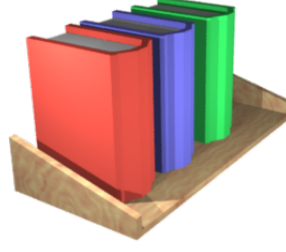
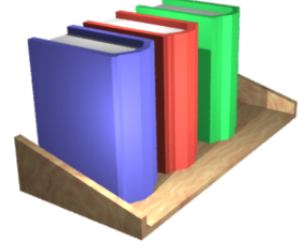



Fig 6 **Fig 7** **Fig 8**

- প্রথম ধাপে নীল বইটা রাখব। এটাকে কোনো একটা প্রান্তে রাখতে বলেছে। প্রান্ত তো আছে দুটো। সুতরাং কাজটা দুইভাবে করা যাবে। তার মানে দুটো শাখা বেরোলো।
- এর পরের ধাপে রাখব লাল বইটা। দুটো জায়গা পড়ে আছে, তাদের মধ্যে যেটাতে খুশি রাখা যায়। সুতরাং দুইভাবে করা যায়। অতএব প্রথম প্রত্যেকটা শাখা থেকে দুটো করে প্রশাখা বেরোলো।
- এবার রাখব সবুজ বইটা। একটাই জায়গা পড়ে আছে। সুতরাং একভাবেই করা যাবে কাজটা। অর্থাৎ প্রশাখাগুলোর প্রত্যেকটা থেকে ঠিক একটা করেই প্র-প্রশাখা বেরোলো।

শাখা-প্রশাখার হিসেব করলেই দেখতে পাচ্ছ যে উত্তর হল $2 \times 2 \times 1 = 4$. ■

যদি বইয়ের সংখ্যা আরও বেশী হত তবে ছবিটা কাগজে ধরানো কঠিন হত, কিন্তু গুণের কায়দাটা একইভাবে খাটত।
মনে রেখো যে গুণের কায়দাটা লাগানোর জন্য গুরুত্বপূর্ণ হল এই যে, প্রতিটা শাখা থেকে সমানসংখ্যক প্রশাখা, প্রতিটা প্রশাখা থেকে সমানসংখ্যক প্র-প্রশাখা ইত্যাদি বেরোতে হবে। অংকটাকে ধাপে ধাপে ভাঙার সময়ে এই কথাটা মাথায় রাখতে হবে। বই সাজানোর অংকটাই আরেকভাবে ভাঙলে এই শর্তটা কিভাবে ক্ষুণ্ণ হত দেখাই। ধরো ধাপগুলো নিলাম Fig 10-এর মত--

1. প্রথমে রাখব সবচেয়ে বাঁদিকের বইটা। বাঁদিকে লাল, নীল সবুজ যেটা খুশি রাখা যায়। অতএব কাজটা করা যাচ্ছে তিনভাবে।
2. এবার রাখব মাঝের বইটা। নীল বইটা মাঝে রাখা যাবে না। যদি একেবারে বাঁদিকে লাল বইটা রেখে থাকি, তবে মাঝে রাখার জন্য খালি সবুজটাই পড়ে আছে। অতএব এই শাখাটা থেকে খালি একটাই প্রশাখা বেরোলো। কিন্তু যদি বাঁদিকে নীলটা রেখে থাকি, তবে মাঝে লাল বা সবুজ যেকোনোটাই রাখা যাবে, মানে সেক্ষেত্রে দুভাবে করা যাবে। ব্যস্, গণ্ডগোল, আগের শাখাটা থেকে বেরিয়েছিল একটা প্রশাখা, কিন্তু এই শাখাটা থেকে দুটো প্রশাখা বেরিয়ে গেল। সুতরাং এভাবে এগোলে গুণের কায়দার সুবিধাটা নেওয়া যাবে না।

এই ব্যাপারটা শেখার পর অনেক ছাত্র একটু ঘাবড়ে যায়। বই ধরে ধরে এগোলে গুণের কায়দা খাটল, অথচ জায়গা ধরে ধরে এগোলে খাটল না--এর মানে কি? নতুন কোনো ধরণের অংক দিলে কি করে বুঝব কোন পথে এগোলে ঠিক হবে? এই সমস্যার কোনো ম্যাজিক সমাধান নেই। যেভাবে ইচ্ছে হয় এগোও, খালি প্রত্যেক ধাপে খেয়াল রেখো শর্তটা অক্ষুণ্ণ আছে কিনা।

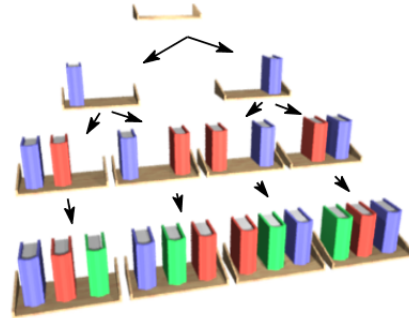
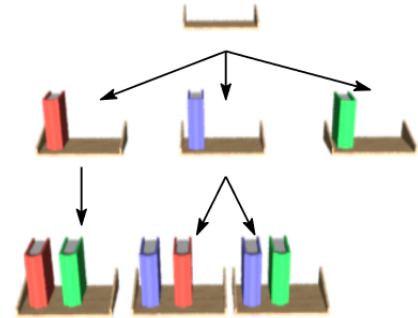



Fig 9 **Fig 10**

যদি ক্ষুণ্ণ হয়, তখন আবার নতুন করে অন্যভাবে ধাপে ভাঙার চেষ্টা কর। বহু অংককেই শর্তটা বজায় রেখে একাধিকভাবে ধাপে ধাপে ভেঙে করা যায়। তাদের মধ্যে যে কোনো একটা তোমার মাথায় এলেই হবে। কিন্তু সেই কায়দাটা মাথায় আসার আগে গোড়াতে একটু এদিক ওদিক ঢুঁ মারতে হতেই পারে। অনেক ছাত্র এক লাফে সঠিক কায়দাটা জেনে ফেলার চেষ্টায় থাকে, এবং প্রথম চেষ্টাতেই সফল না হলে দুশ্চিন্তায় পড়ে যায়। কিন্তু দুশ্চিন্তার কোনোই কারণ নেই। একবারে ঠিক উত্তর মাথায় না আসাটা ভয়ানক কিছু নয়। যেটা ভয়ানক সেটা হল ভুল করে ফেলার পর সেটাকে ভুল বলে চিনতে না পারা!
এবার তোমার হাতপাকানোর জন্য কয়েকটা অংক দিই।

Exercise 7: আমার কাছে দুটো অংক বই আর দুটো ইতিহাস বই আছে। ওদেরকে আমি একটা তাকে এমনভাবে সাজিয়ে রাখতে চাই, যাতে অংক বইদুটো থাকে দুই প্রান্তে। কতভাবে করা যাবে?

HINT:

ধাপগুলো বলে দিচ্ছি, সংখ্যাগুলো বার করার দায়িত্ব তোমার। অংকবই দুটোকে M_1 আর M_2 বলব। ইতিহাসের দুটোকে H_1, H_2.

1. প্রথমে M_1-কে কোনো এক প্রান্তে রাখো। এই কাজটা [a]-ভাবে করা যায়।
2. তারপর M_2-কে রাখো তার বিপরীত প্রান্তে। এই কাজটা [b]-ভাবে করা যায়।
3. এবার H_1-কে মাঝের দুটো জায়গার কোনো একটাতে রাখো। এই কাজটা [c]-ভাবে করা যায়।
4. সবশেষে অবশিষ্ট জায়গাটায় H_2-কে ঢুকিয়ে দাও। এই কাজটা [d]-ভাবে করা যায়।

সুতরাং উত্তর হল [e]। ■

এবার একইরকম আরেকটা অংক, এবার আর ধাপগুলো বলে দেব না।

Exercise 8: যদি তিনটে লাল বই, আর চারটে নীল বই থাকত, তবে ওদেরকে কতভাবে সাজানো যেত, যদি দুইপ্রান্তেই খালি লাল বইই রাখা যায়? একই রঙের বইরাও কিন্তু আলাদা আলাদা। ■

এবার একটা অংক দিয়ে দুইভাবে ধাপেধাপে ভাঙব। তার মধ্যে একটার বেলায় গুণের নিয়ম ব্যবহার করা যাবে, অন্যটার ক্ষেত্রে যাবে না। তোমাকে বলতে হবে কোনটার বেলায় যাবে, এবং অন্যটার বেলায় কেন যাবে না।

Exercise 9: আবার তিনটে বই নিলাম, লাল, নীল আর সবুজ। তাকের উপর পাশাপাশি রাখতে হবে, যাতে লাল বইটা থাকে নীল বইটার ডানদিকে কোথাও। একদম গায় লেগে থাকতে হবে এমন বলছি না।
প্রথমে এইভাবে এগোই--

1. নীল বইটা প্রথম দুটো জায়গার কোনোটায় বসাও। (তৃতীয় জায়গায় বসানো যাবে না, কারণ তাহলে লালটার জন্য জায়গা থাকবে না)।
2. এবার লাল বইটাকে নীলের ডানদিকে কোথাও রাখো।
3. সবশেষে অবশিষ্ট জায়গায় সবুজ বইটাকে ঢুকিয়ে দাও।

এবার আরেকভাবে ভাঙি। Fig 11-এর দিকে চোখ রাখো।

1. নীল বইটাকে টেবিলের উপর শুইয়ে রাখো।
2. লাল বইটাকে নীলটার ডানদিকে কোথাও রাখো।

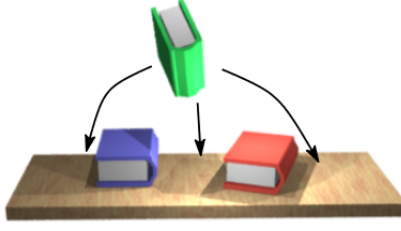



Fig 11

3. এদের মধ্যে তিনটে ফাঁক তৈরী হয়েছে, তার যে কোনো একটায় সবুজটা রাখো। এবার বইগুলো যে যার পরে আছে সেইভাবে ধরে তাকের উপর তুলে দাও।

তোমাকে বলতে হবে এর মধ্যে কোনটার ক্ষেত্রে multiplication principle লাগানো যাবে, অন্যটর ক্ষেত্রে কেন যাবে না, এবং উত্তরটাই বা কি হবে। ■

1.2.2 উধোর পিণ্ডি বুধোর ঘাড়ে চাপানোর অংক

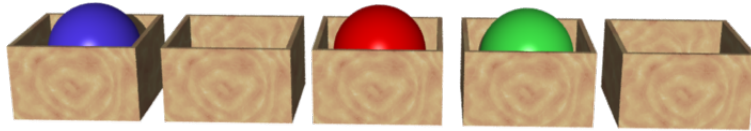
এবার আমরা এক জাতীয় অংক দেখব যাদের মূল কথা হল কোনো এক ধরণের জিনিসের মধ্যে আরেক ধরণের জিনিস কতভাবে রাখা যায় সেটা গোণা, যেমন বাক্সের মধ্যে বল রাখা, বা খামের মধ্যে চিঠি। এই ধরণের অংক এই বইতে বার বার ফিরে ফিরে আসবে। আপাততঃ আমরা সেইগুলোই করব যেগুলোকে multiplication principle দিয়ে কাত করা যাবে।

Example 6: There are 3 balls of different colours and 5 distinct boxes. In how many ways can the balls be put into the boxes if no two balls go to the same box.
SOLUTION: ছবি দিয়ে ভাবলে ব্যাপারটা Fig 12-এর মত। ধাপে ধাপে এগোই এইভাবে--

> Let the balls have colours red, green and blue.
>
> - Choose a box for the red ball: 5 ways.
> - Choose a different box for the green ball: $5 - 1 = 4$ ways.
> - Choose a different box for the blue ball: $4 - 1 = 3$ ways.
>
> So, by multiplication principle, the answer is $5 \times 4 \times 3 = 60$.

■

এবার একই অংক সামান্য ঘুরিয়ে দিচ্ছি।

Fig 12

Exercise 10: In how many ways can 3 distinct balls be put into 5 distinct boxes, if each box can hold any number of balls? ■

এতক্ষণ বল ছিল কম বাক্স ছিল বেশী। এবার দেখি বাক্স কম পড়লে কি হত। নীচের অংকটা সেটা নিয়েই। খালি গল্পটা একটু অন্যভাবে দিয়েছি, বাক্সের বদলে হোটেলের ঘর, আর বলের বদলে মানুষ।

Example 7: পাঁচ বন্ধু একটা হোটেলে গেছে। সেখানে খালি চারটে ঘর ফাঁকা আছে। সবগুলোই single-bed-ওয়ালা, তবে ম্যানেজারকে বললে যে কোনো একটা ঘরে একটা বাড়তি বিছানার ব্যবস্থা করে দেবে। ঠিক হয়েছে যে তিনটে ঘরে এক জন করে থাকবে, আর একটা ঘরে দুজন। এই কাজটা কতভাবে করা যাবে?

SOLUTION:

- প্রথমে কোন ঘরে বাড়তি বিছানাটা ঢোকানো হবে সেটা ঠিক কর : 4 ভাবে করা যায়।
- বাকি ঘরগুলোর মধ্যে সবচেয়ে বাঁদিকের ঘরে কে থাকবে সেটা ঠিক কর : 5 ভাবে করা যায়।
- বাকি দুটো ঘরের মধ্যে সবচেয়ে বাঁদিকের ঘরে কে থাকবে সেটা ঠিক কর : 4 ভাবে করা যায়।
- বাকি ঘরটায় কে যাবে? সেটা ঠিক করা যায় 3 ভাবে।
- যে দুজন পড়ে রইল তাদেরকে সেই বাড়তি বিছানাওয়ালা ঘরে ঢুকিয়ে দাও। সে কাজটা একভাবেই করা যায়।

সুতরাং multiplication principle লাগিয়ে উত্তর হচ্ছে $4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 240$. ■

এবার তোমার করার জন্য একটা অংক।

Exercise 11: ছয় বন্ধু একটা হোটেলে গেছে যেখানে চারটে মোটে ঘর ফাঁকা। ঘরগুলো সব single-bed-ওয়ালা, তবে যে কোনো একটাতে চাইলে বাড়তি দুটো বিছানা দেওয়া হবে। এবার ওরা কতভাবে থাকতে পারবে? ■

Exercise 12: সোমবার পাঁচ পিরিয়ড ক্লাস হয়, টিফিনের আগে তিনটে, আর টিফিনের পরে দুটো। চারটে বিষয়ের ক্লাস ঢোকাতে হবে তার মধ্যে, অংক, physics, chemistry আর computer science. ক্লাসগুলো সব এক পিরিয়ড ধরে হবে। খালি একটা ক্লাস বাদে, সেটা দুই পিরিয়ড ধরে চলবে। বলাই বাহুল্য যে সেই দুই পিরিয়ড একটানা হতে হবে (অর্ধেকটা টিফিনের আগে বাকিটা টিফিনের পরে, এরকম নয়)। কতভাবে করা যায়? ■

DAY 2
গুণের সূত্র (part 2)

2.1 Multiplication principle (contd.)

আজকে আমরা multiplication principle-এর আরো কিছু উদাহরণ দেখব। এই উদাহরণগুলো দেখাচ্ছি খালি এটা বোঝানোর জন্য যে multiplication principle-এর প্রয়োগ কত বিচিত্র হতে পারে। এই উদাহরণগুলোকে যেন মুখস্থ করতে শুরু কোরো না। কারণ এদের বাইরেও বহু উদাহরণ সম্ভব।

2.1.1 পথ খোঁজার অংক

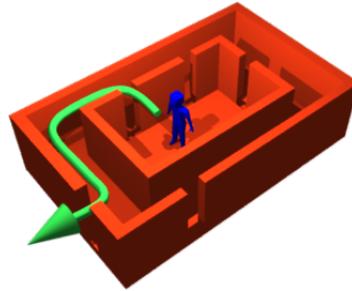
অনেক অংকে multiplication principle ব্যবহার করে বার করা যাবে কতভাবে এক জায়গা থেকে আরেক জায়গায় যাওয়া যায়।

Example 8: A prison consists of an inner chamber and an outer chamber. There are exactly

3 exits from the inner chamber all of which open into the outer chamber. The outer chamber is connected to the outside world by two doors. In how many ways can a prisoner in the inner chamber come out of the prison by visiting the outer chamber only once?

SOLUTION: অনেক combinatorics-এর অংকেই একটা গল্প বলা থাকে। সেই গল্পটার মানে বুঝতে না পারলে মুস্কিল। এখানে যেমন জেলখানার গল্প রয়েছে। মনে মনে জেলখানাটার একটা ছবি এঁকে নেওয়া যাক (Fig 13)। লোকটা যে ঘরে দাঁড়িয়ে আছে ওটাই হল inner chamber. এই ঘরটার চারিদিকে একটা বারান্দার মত আছে দেখছ? ওটাই হল outer chamber. প্রশ্ন হল লোকটা কতভাবে জেলখানার বাইরে আসতে পারে। এর জন্য প্রথমে ওকে outer chamber-এ আসতে হবে, এবং সেখান থেকে বাইরে বেরোতে হবে। একটা পথ দেখিয়েছি Fig 13-এ। এখানে "কতভাবে বেরোতে পারে" মানে হল কতভাবে লোকটা বেরোবার জন্য দরজা নির্বাচন করতে পারে। ওকে দুবার দরজা নির্বাচন করতে হবে, একবার inner chamber থেকে outer chamber-এ আসবার জন্য, তারপর outer chamber থেকে বাইরে যাবার জন্য। আচ্ছা, লোকটা যদি হঠাৎ পায়চারি শুরু করে? মানে ধরো outer chamber অব্দি গিয়ে ফের inner chamber-এ ফিরে এল, তারপর আবার outer chamber-এ গেল, এরকম বার কয়েক করে তবে বাইরে বেরোলো। বাস্তবে অবশ্য কয়েদীরা জেল থেকে বেরোবার সুযোগ পেলে এরকম পায়চারি করে সময় নষ্ট করে না। তবে এই লোকটা কিনা অংকের কয়েদী তাই পায়চারি করলেও করতে পারে, সেটা বন্ধ করতেই ওই শর্তটা-- by visiting the outer chamber only once, অর্থাৎ কিনা পালাতে দিচ্ছি বাপু পালাও, খামোখা পায়চারি শুরু কোরো না!

- Pick a door from the inner to the outer chamber: 3 ways.
- Pick a door from the outer chamber to the outside world: 2 ways.

Fig 13

> So, by the multiplication principle, the answer is $3 \times 2 = 6$.

■

এবার তোমার জন্য একটা শূন্যস্থানপূরণের অংক দিই। এটাও ওই একই জেলখানা নিয়ে।

Exercise 13: In how many ways can the prisoner go to the outer chamber and return to the inner chamber without going outside?

HINT:

> - Pick a door from the inner to the outer chamber: [a] ways.
> - Pick a door from the outer to the inner chamber: [b] ways.
>
> So, by the multiplication principle, the answer is [c].

■

এবার একই কয়েদীর আরেকটা অংক তোমার নিজে নিজে করার জন্য রেখে দিলাম।

Exercise 14: Suppose that the prisoner went from the inner chamber to the outside world, and then returned to the inner chamber, visiting the outer chamber exactly twice in the process. In how many ways could he do this without using any door more than once? ■

Exercise 15: There are 3 flights from Kolkata to New Delhi and 5 flights from New Delhi to Mumbai. In how many ways can one fly from Kolkata to Mumbai via New Delhi? ■

Exercise 16: There are $n \geq 3$ places all connected by roads to one another. Let the places be numbered $1, 2, ..., n$. In how many ways can one go from 1 to n in making in three steps by visiting exactly two other places in between?

HINT:

অংকটা কি চাইছে বুঝছ তো? একটা ছবি দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। ধরো $n = 5$-টা জায়গা আছে। মানে যেন 5-টা বিন্দু প্রত্যেকে বাকিদের সঙ্গে লাইন দিয়ে যুক্ত (Fig 14) আমি 1 থেকে 5-এ যাব, মাঝে অন্য যে কোনো দুটো বিন্দুকে ছুঁয়ে। এরকম একটা পথ দেখিয়েছি Fig 15-এ লাল রং দিয়ে। প্রশ্ন হল--এরকম কটা পথ আছে? ■

Fig 14

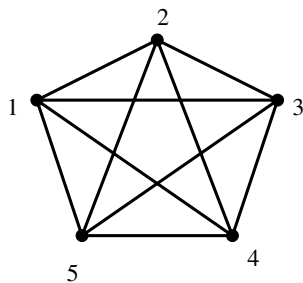



Fig 15

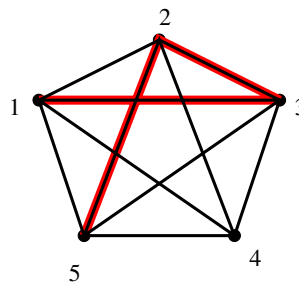
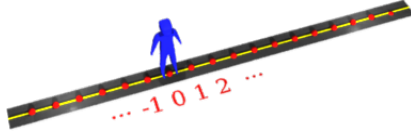
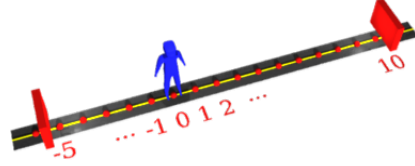



Fig 16 **Fig 17**

এবার একটা অন্যরকম অংক দিই।

Exercise 17: যত integer (পূর্ণসংখ্যা) আছে, তাদেরকে একটা লাইন বরাবর কল্পনা কর, যেমন দেখিয়েছি Fig 16-এ। এই লাইনে একটা পাগল দাঁড়িয়ে আছে ঠিক 0-র উপরে। প্রতি পদক্ষেপে ও এক ঘর করে সরতে পারে, কিন্তু পাগল তো, কোন দিকে যে সরবে তার কোনো ঠিক নেই, বাঁদিকেও এক ঘর যেতে পারে, আবার ডানদিকেও একঘর যেতে পারে। তবে কোনো একটা দিকে যেতে ওকে হবেই, এক জায়গায় স্থির হয়ে থাকবার জো নেই। বলো তো, ও যদি দশ পা যায়, তবে সেটা কতভাবে যেতে পারে? ■

এইবার একটা গুগলি দিই। ঠিক কায়দাটা বুঝতে পারলে উত্তরটা কোনো খাতাকলম ছাড়াই মুহূর্তের মধ্যে বলে দেওয়া যায়।

Exercise 18: একটা পাগলকে তো আর এরকম যত্রতত্র চরে বেড়াতে দেওয়া যায় না, তাই দুই দিকে দুটো দেয়াল তোলা হয়েছে Fig 17-এর মত। সুতরাং এখন পাগলটার গতিবিধি খালি $\{-5, -4, ..., 9, 10\}$-এই সীমাবদ্ধ। যদি ও -5-এর চলে আসে তবে পরের পদক্ষেপে ওকে -4-এ ফিরতেই হবে। একইভাবে 10-এ পৌঁছে গেলে ওর পক্ষে 9-তে ফেরা ছাড়া গত্যন্তর নেই। এবার ধরো পাগলটা k-খানা পদক্ষেপ করল, এবং সেই কাজটা ও যতভাবে করতে পারে তার নাম দিলাম $N(k)$. তোমাকে বলতে হবে সবচেয়ে ছোটো কোন k-এর জন্য $N(k) < 2^k$ হবে। ■

2.1.2 Factorisation problems

এবার কিছু অংক করব যেখানে বিভিন্ন সংখ্যাকে factorise (মানে উৎপাদকে বিশ্লেষণ) করতে হবে। এরকম অংকে সাধারণতঃ সংখ্যাগুলোকে শুরুতেই যথাসম্ভব factorise করে নিলে সুবিধা হয়। "যথাসম্ভব" মানে যতটা ছোটো ছোটো factor-এ সম্ভব ভেঙে নেওয়া, যাদেরকে আর ভাঙা যায় না। যেসব সংখ্যাকে আরও ছোটো ছোটো factor-এ ভাঙা যায় না তাদেরকে যে prime number (মৌলিক সংখ্যা) বলে সে তো জানোই। কোনো সংখ্যা দেওয়া থাকলে তার prime factorisation বার করতেও তোমরা ছোটোবেলাতেই শিখেছ। এইবার সেটা খুব কাজে দেবে।

Example 9: Find the number of positive factors of $4^6 6^7 21^8$.

SOLUTION: প্রথমেই prime factor-এ ভেঙে নেব, মানে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ--

> The prime factorisation of the given number is $2^{19} \times 3^{15} \times 7^8$.

এবার চট্ করে বল তো 5 দিয়ে কি এই সংখ্যাটা ভাগ যাবে? অবশ্যই না, সংখ্যাটা তো খালি কয়েকটা করে $2, 3$ আর 7 গুণ করে তৈরী। তার মধ্যে তো কোনো 5 নেই! লক্ষ কর যে যুক্তিটা খাটছে কারণ $2, 3, 7, 5$ এরা সবাই prime. তা না হলে কিন্তু এভাবে বলা যেত না। যেমন সংখ্যাটা দিব্যি 14 দিয়ে ভাগ যায়, যদিও prime factorisation-এ 14-র কোনো উল্লেখ নেই। কারণ 14 আসলে ভিতরে ভিতরে 2×7 দিয়ে তৈরী।
যাই হোক, বুঝতেই পারছ যে এই সংখ্যাটার factor-রাও সবাই খালি $2, 3$ আর 7 দিয়েই তৈরী হতে বাধ্য, আর কোনো prime factor ঢুকে পড়ার জো নেই। এবার বলো তো 2^{20} দিয়ে কি একটা factor হতে পারে? না, কারণ সংখ্যাটায় 2 আছে মোটে 19 বার। অতএব ওর কোনো factor-এর মধ্যে সর্বাধিক 19-টা 2-ই থাকতে পারে। একই যুক্তিতে 3 থাকতে পারে সর্বাধিক 15-টা, এবং 7 থাকতে পারে বড়োজোর 8-খানা। সুতরাং--

> Any positive factor is of the form $2^i 3^j 7^k$ for $i \in \{0, 1, ..., 19\}$, $j \in \{0, 1, ..., 15\}$ and $k \in \{0, 1, ..., 8\}$.

তার মানে factor বানানো মানে i, j, k নির্বাচন, যেটা ধাপে ধাপে করা যায়--

> So all the positive factors can be constructed stepwise as follows:
>
> - Pick a number i from $\{0, 1, ..., 19\}$: 20 ways,
> - Pick a number j from $\{0, 1, ..., 15\}$: 16 ways,
> - Pick a number k from $\{0, 1, ..., 8\}$: 9 ways.
>
> So the required answer is $20 \times 16 \times 9 = 2880$.

■

এবার তোমার জন্য একটা অংক।

Exercise 19: Find the number of all positive factors of 3500. ■

একটু কঠিন করা যাক।

Example 10: Among all the factors of $4^6 6^7 21^8$, the number of factors which are perfect squares is

(A) 240 (B) 360 (C) 400 (D) 640

(BStat2011.5)

SOLUTION:

> The prime factorisation is $2^{19} \times 3^{15} \times 7^8$.
> So any positive factor is of the form $2^i 3^j 7^k$ for $i \in \{0, 1, ..., 19\}$, $j \in \{0, 1, ..., 15\}$ and $k \in \{0, 1, ..., 8\}$.

এইবার লক্ষ কর যে square number-দের prime factorisation-এ প্রত্যেকটা prime আসে even-বার, মানে জোড়সংখ্যকবার। যেমন $3^4 7^2$ একটা square number, যার square root হল $3^2 7$. দেখতেই পাচ্ছ যে 3^4-কে দুই square root-এর মধ্যে সমান ভাবে ভাগ করে দিয়েছি 3^2 করে। একইভাবে 7^2-এর মধ্যে যে দুটো 7 ছিল তার প্রত্যেকটা গেছে একেকটা square root-এ। যদি অন্ততঃ একটা prime factor-ও বিজোড় সংখ্যকবার থাকত, তবে তাকে এইরকম সমান সমান ভাগ করা যেত না। এই ধর্মটাও কিন্তু খালি prime factorisation-এর জন্যই খাটে। যেমন $6^1 \times 2^1 \times 3^1$ একটা দিব্যি square number, অথচ power-গুলো সবাই 1 (বিজোড়)। এখানে অসুবিধা নেই, কারণ 6-টা আসলে prime নয়। যেই তুমি $6 = 2 \times 3$ লিখবে অমনি পাবে $2^2 3^2$, যেখানে power-গুলো even হয়ে গেছে।
সুতরাং লিখতে পারি--

> It is a square number if and only if i, j, k are all even numbers.

এবার আমরা দেখব কতগুলো factor বানানো যায় যারা square number হয়। কাজটা ধাপে ধাপে করব, যাতে multiplication principle লাগানো যায়।

> All such factors can be constructed stepwise as follows:
>
> - Pick an even number i from $\{0,1,...,19\}$: 10 ways,
> - Pick an even number j from $\{0,1,...,15\}$: 8 ways,
> - Pick an even number k from $\{0,1,...,8\}$: 5 ways.
>
> So the required answer is $10 \times 8 \times 5 = 400$.

■

একইভাবে নীচের দুটো অংক চেষ্টা কর।

Exercise 20: Among the factors of $2^5 \times 24^3 \times 7^4$, how many are perfect squares? ■

Exercise 21: Among the positive factors of $12^{12} \times 14^{14} \times 9^9$, how many are perfect cubes? ■

Example 11: The number of divisors of the form $(4n+2)$, $n \geq 0$, of the integer 240 is

(A) 4 (B) 8 (C) 10 (D) 3

(IIT,1998)

SOLUTION: এই অংকটা করার একটা কায়দা হল ধরে ধরে সবগুলো factor লিখে ফেলা, এবং তারপর একে একে পরীক্ষা করে দেখা কারা $4n+2$ আকারের। যেহেতু 240 খুব বড় সংখ্যা নয়, তাই এই কাজটা সহজেই করা যাবে।

> All the divisors of 240 are
>
> $$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 80, 120, 240.$$

এবার দেখি কারা $4n+2$ আকারের, মানে কাদেরকে 4 দিয়ে ভাগ করলে 2 ভাগশেষ থাকে।

> We have to check which of these are of the given form:
>
> $$2, 6, 10, 30.$$
>
> So the answer is 4.

240-এর জায়গায় কোনো বড় সংখ্যা দিলে অবশ্য এভাবে এগোনো কঠিন হত। তখন আমরা নীচের কায়দায় করতে পারি। এর জন্য খালি একটা জিনিস লক্ষ করতে হবে-- $4n+2$ আকারের হওয়া মানে 2 দিয়ে ভাগ যায় কিন্তু 2^2 দিয়ে যায় না, অর্থাৎ সংখ্যাটার prime factorisation-এ ঠিক একটাই 2 থাকতে হবে।

বিকল্প পদ্ধতি

> We are looking for factors that are divisible by 2 but not by 2^2. The prime factorisation of 240 is
>
> $$240 = 2^4 \times 3 \times 5.$$
>
> So each factor of 240 is of the form $2^i 3^j 5^k$ where $i \in \{0,1,2,3,4\}$, $j \in \{0,1\}$

> and $k \in \{0, 1\}$.
> Since we need factors of the form $4n+2$, so $i = 1$.

তার মানে I, j, k-র মধ্যে i-এর হিল্লে হয়ে গেল। বাকি রইল j আর k--

> - Can choose $j \in \{0, 1\}$ in 2 ways.
> - Can choose $k \in \{0, 1\}$ in 2 ways.
>
> So, by multiplication principle, the answer is $2 \times 2 = 4$.

■

Exercise 22: Find the number of all factors of $162 \times 125 \times 49$ that are of the form $9n+3$. ■

আরেক ধরণের অংক দেখি।

Example 12: If r, s, t are prime numbers and p, q are positive integers such that LCM of p, q is $r^2s^4t^2$, then the number of ordered pairs (p, q) is

(A) 252 (B) 254 (C) 225 (D) 224

(IIT,2006)

SOLUTION: চট্ করে মনে করিয়ে দিই যে LCM হল বাংলায় যাকে লসাগু বলে। এখানে ordered মানে কিন্তু $p < q$ নয়, এর মানে হল কে আগে কে পরে সেটা গুরুত্বপূর্ণ। যেমন যদি $p = 3$ আর $q = 5$ হয় তাহলে (p, q) হচ্ছে $(3, 5)$. আবার যদি উল্টোটা হত, মানে $p = 5$ আর $q = 3$, তবে (p, q) হত $(5, 3)$. এই দুটোকে আলাদা করে গুণতে হবে। যদি p, q দুজনেই সমান হয়, তবে অবশ্য একবারই গোণা হবে। যেমন $p = q = 4$ হলে (p, q) আর (q, p) দুজনেই একই জিনিস $(4, 4)$. সেটাকে দুবার করে গোণার মানে হয় না।

> Since both p, q divide $r^2s^4t^2$, so $p = r^a s^b t^c$ and $q = r^\alpha s^\beta t^\gamma$ for some $a, \alpha \in \{0, 1, 2\}$, $b, \beta \in \{0, 1, .., 4\}$ and $c, \gamma \in \{0, 1, 2\}$.
> Also, since p, q have LCM $r^2s^4t^2$, hence $\max\{a, \alpha\} = 2$, $\max\{b, \beta\} = 4$ and $\max\{c, \gamma\} = 2$.

এই জায়গাটা বুঝলে তো? যদি $2^4 3^5$ আর $2^3 3^7$-এর LCM বার করতে দিই, উত্তর কত হবে? যেহেতু LCM-টা দুটো সংখ্যা দিয়েই ভাগ যাবে তাই ওটা 2^4 আর 2^3 দিয়ে ভাগ যেতে বাধ্য। যেহেতু $4 > 3$, তাই 2^4 দিয়ে ভাগ যাওয়াই যথেষ্ট। একইভাবে 3-এর উপর তলায় আছে 5 আর 7, তাদের মধ্যে বড়টা নাও, মানে 7. তাহলে 3^7 দিয়ে ভাগ গেলেই 3^5 দিয়েও ভাগ যাবে। সুতরাং LCM-টা হবে $2^4 3^7$. এখানেও একই যুক্তি লাগিয়েছি।

> So the problem reduces to finding all such $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.
>
> - Choose values of a, α : $(2, 0), (0, 2), (2, 1), (1, 2)$ and $(2, 2)$: 5 ways.

লক্ষ কর যে, আমরা $(2, 0)$ আর $(0, 2)$-কে আলাদা করে গুণছি, যেহেতু অংকে "ordered" বলে দিয়েছিল।

- Choose values of $b, \beta :$ $(4,0),(0,4),(4,1),(1,4),(4,2),(2,4),(4,3),(3,4)$ and $(4,4):$ 9 ways.
- Choose values of $c, \gamma :$ $(2,0),(0,2),(2,1),(1,2)$ and $(2,2):$ 5 ways.

So the answer is $5 \times 9 \times 5 = 225$.

■

Exercise 23: If r, s, t are prime numbers and p, q are positive integers such that LCM of p, q is $r^3 s^4 t^5$, then find the number of ordered pairs (p, q). ■

যদি ordered-এর জায়গায় unordered বলত তবে অংকটা সামান্য বেশী কঠিন হত। সেটা আমরা পরে আলোচনা করব।

Exercise 24: If r, s, t are prime numbers and p, q are positive integers such that LCM of p, q is $r^3 s^4 t^5$ and HCF is rst^2, then find the number of ordered pairs (p, q).
HINT:
একটু ধরিয়ে দিই। এখানে HCF মানে হল গসাগু। আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে $2^3 3^7$ আর $2^4 3^5$-এর LCM পাওয়া যায় power-গুলোর মধ্যে যেটা বড় সেটা নিয়ে। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে HCF-এর বেলায় ব্যাপারটা ঠিক উল্টো--এখানে power-গুলোর মধ্যে ছোটোটা নিতে হবে। যেমন $2^3 3^7$ আর $2^4 3^5$-এর HCF হবে $2^3 3^5$. এবার অংকটা করতে পারা উচিত।
■

Example 13: How many ordered pairs (m, n) of integers satisfy $\frac{m}{12} = \frac{12}{n}$? (A) 30 (B) 15 C) 12 (D) 10. **(KVPY.SA.2012)**
SOLUTION: অংকটায় সামান্য ভুল আছে। এখানে m, n-কে positive বলে দেওয়া উচিত ছিল।

We need $mn = 12 \times 12 = 144$. So m must be a factor of 144, and $n = \frac{144}{m}$.
So the problem reduces to finding the number of distinct factors of 144.
Now $144 = 2^4 \times 3^2$.
So all the factors are of the form $2^i 3^j$, where $i \in \{0,1,2,3,4\}$ and $j \in \{0,1,2\}$.

- Select $i :$ 5 ways
- Select $j :$ 3 ways.

So the required answer is $5 \times 3 = 15$.

■

Exercise 25: আমরা এই অংকটায় m, n-কে positive ধরে করলাম। যদি না ধরতাম তবে উত্তরটা কি হত? ■

এবার তোমার নিজে নিজে করার জন্য একটা একইরকমের অংক।

Exercise 26: How many ordered pairs (m, n) of positive integers satisfy $\frac{m}{24} = \frac{24}{n}$? ■

DAY 3
যোগের সূত্র

3.1 হুঁশিয়ার--Overcounting, undercounting

Combinatorics-এর অংক শেখার একটা মস্ত সমস্যা হল--একই অংক মনে হয় বিভিন্ন পথে করা যায়, অথচ বিভিন্নপথে আলাদা আলাদা উত্তর আসে! মাস্টারমশাই যেটাকে ঠিক পথ বলে দেন, সেটা নিয়ে তোমার হয়তো সন্দেহ নেই, কিন্তু তোমার মাথায় অন্য যে কায়দাটা আসছে সেটাকেও একই রকম ঠিক মনে হয়, অথচ উত্তর মেলে না! অতএব combinatorics-এর অংক শেখার সময়ে জহুরীর চোখ চাই, খাঁটি হিরে চেনাটাই যথেষ্ট নয়, ঝুটো হিরেটাও চিনতে হবে। Combinatorics-এর দুনিয়ায় ঝুটো হিরে প্রধানতঃ দুরকম--

- overcounting, মানে ভুল করে একই জিনিসকে একাধিকবার গুণে ফেলা,
- undercounting, মানে ভুল করে কোনো জিনিস গুণতে ভুলে যাওয়া।

যেমন ধরো Fig 18-এ দশটা ফুটকি রয়েছে। তুমি এগুলোকে গুণছ। $1, 2, \ldots$ করে 5 অব্ধি গুণেছ এমন সময়ে ফোন এল একটা। ফোনে কথা সেরে তুমি Fig 19-এর মত $6, 7, \ldots$ করে গুণে 11-এ গিয়ে থামলে। কিন্তু ফুটকি তো ছিল মোটে দশটা, তবে 11 এল কোত্থেকে? এখানে তুমি একটা overcounting করেছ, যেটাকে 5 গুণেছিলে, সেটাকেই আবার 7 গুণে ফেলেছ। যদি Fig 20-এর মত গুণতে তবে আবার তোমার হিসেবে মোটে নয়টা ফুটকি হত। এবার undercounting হয়েছে। একটা ফুটকি গোণাই হয় নি।
এই দুই ধরণের ভুল হামেশাই হয়ে থাকে। এই প্রসঙ্গে একটা ছোটোবেলাকার ধাঁধা মনে পড়ল। একটা ঘরে তিনজন লোক আছে। তার মধ্যে দুজন বাবা, দুজন ছেলে। কি করে সম্ভব? এটা শুনে প্রথমটায় অসম্ভব মনে হয়, কারণ দুজন বাবা আর দুজন ছেলে মিলে ঘরে মোট চারজন আছে বলে মনে হয়। কিন্তু ধরো ঘরে আছে দশরথ, রাম আর কুশ। তুমি যখন বাবাদের গুণছ তখন রামকে একবার গুণছ কুশের বাবা হিসেবে। আবার যখন ছেলেদের গুণছ তখনও রামকে আরেকবার গুণছ দশরথের ছেলে হিসেবে। এই overcounting-এর জন্যই হিসেব মিলছে না।
আমরা এই বইতে অনেকসময়ে একই অংকের একাধিক সমাধান দেব, যাদের মধ্যে কোনো কোনো সমাধানে ভুল উত্তর বেরোবে। ভুল সমাধানগুলোর ভুল কোথায় সেটাও আলোচনা করব, এবং তা থেকেই তুমি ঝুটো হিরে চিনতে শিখবে। নীচে এরকম দুটো উদাহরণ দিলাম।

Example 14: এক দেশের রাজা ঠিক করেছেন দেশের জন্য একটা নতুন রকম পতাকা বানাবেন, তার ডিজাইন ঠিক

হয়েছে Fig 21-এর মত, যেখানে চারটে পটি আছে। অবশ্য ওই রকম ম্যাড়মেড়ে পতাকা কারোর পছন্দ হতে পারে না, তাই পটিগুলোকে অবশ্যই রঙিন হতে হবে। রাজার দরজি খবর দিয়েছে যে, তিনরকম রঙের কাপড় আছে, যেগুলোকে দেখিয়েছি Fig 22-এ। যেটা এখনও ঠিক হয় নি সেটা হল কোন পটিতে কোন রংটা যাবে। দুটো পাশাপাশি পটিতে অবশ্যই আলাদা আলাদা রং করতে হবে, নইলে পটি দুটোকে আলাদা করা যাবে না। প্রশ্ন হল এই শর্ত মেনে কতরকম পতাকা সম্ভব? রাজার দুই মন্ত্রী ছিল, তাদের উপর ভার পড়েছে এই সমস্যা সমাধানের।

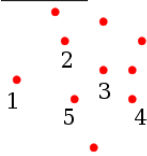
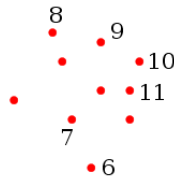
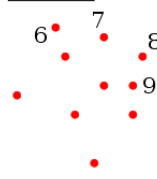



Fig 21

Fig 22

SOLUTION: মন্ত্রীরা multiplication principle জানত, তাই অংকটাকে ধাপে ধাপে ভেঙে নিয়েছে। তবে দুই মন্ত্রী কাজটা দুভাবে করেছে। ছোটো মন্ত্রী করেছে এইভাবে--

- প্রথম ধাপে উপরের পটিটকে রং করব, সেটা তিনটে রঙের যে কোনোটা দিয়ে করা যায়। সুতরাং প্রথম ধাপে শাখার সংখ্যা 3.
- দ্বিতীয় ধাপে তার নীচের পটিটায় রং দেব। প্রথম পটিতে যে রংটা লাগিয়েছি সেটা আর দ্বিতীয় পটিতে চলবে না। সুতরাং বাকি দুটো রঙের একটা লাগাতে হবে। তার মানে প্রতিটা শাখা থেকে প্রশাখা বেরোল 2-টো করে।
- তৃতীয় ধাপে রং করব তার নীচের পটিটা। এখানে খালি দ্বিতীয় পটির রংটাকে এড়িয়ে চলতে হবে। প্রথম পটির রংটা ব্যবহার করলে আপত্তি নেই। সুতরাং প্রতিটা প্রশাখা থেকে প্র-প্রশাখা বেরোল ফের 2-টো করে।
- চতুর্থ ধাপে হাত পড়বে সবচেয়ে নীচের পটিতে। এখানেও খালি একটা রংকে এড়িয়ে চলতে হবে, যে রংটা দেওয়া হয়েছে ঠিক আগের পটিটায়। সুতরাং এই ধাপে প্র-প্র-প্রশাখা পাচ্ছি 2-টো করে।

সব মিলিয়ে উত্তর হল $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$.
বড় মন্ত্রী অবশ্য ধাপগুলোকে ভেঙেছে এইভাবে--

- প্রথম ধাপে এখানেও আমরা উপরের পটিটাকে রং করব। সেটা করার 3-টে কায়দা।
- দ্বিতীয় ধাপে আমরা হাত দেব তার পরের পরের পটিটায়, মানে উপর থেকে তিন নম্বর পটিতে। যেহেতু এটা প্রথম পটির গায় লেগে নেই, অতএব এখানেও নিশ্চিন্তে তিনটে রঙের যে কোনো একটা লাগানো যাবে। সুতরাং প্রতিটা শাখা থেকে প্রশাখা বেরোলো 3-টে করে।
- তৃতীয় ধাপে আমরা রং করব একদম নীচের পটিটা। সেটা করা যাবে 2 ভাবে, খালি তিন নম্বর পটির রংটাকে ব্যবহার না করলেই হল। সুতরাং প্রতিটি প্রশাখা থেকে প্র-প্রশাখা বেরোলো 2-টো করে।
- চতুর্থ ধাপে আমরা হাত দেব অবশিষ্ট পটিটায়। এর উপরে নীচে দুদিকেই রং হয়ে গেছে। সুতরাং সেই দুটো রংকে বাঁচিয়ে পড়ে আছে খালি একটাই রং। সেটাই দিতে হবে। তার মানে প্রতিটা প্র-প্রশাখা থেকে একটা করেই প্র-প্র-প্রশাখা বেরোলো,

Fig 23

সব মিলিয়ে বড় মন্ত্রীর উত্তর হল $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$.
দুজনের মধ্যে অন্ততঃ একজন তো অবশ্যই ভুল করেছে। কিংবা হয় তো দুজনেই। তুমি সে বিষয়ে রাজামশায়কে একটু সাহায্য করতে পারো? তাতে রাজামশায়েরও উপকার হয়, মন্ত্রীদুটোও একটু অংক শেখে! ■

আমরা এই সমস্যার সমাধান দেব একটু পরে, যাতে তুমি মাথা ঘামাবার খানিকটা সময় পাও। ততক্ষণে আরেকটা অংক দিই, সেখানে সমস্যা অন্যরকম।

Example 15: একটা তাকে চারটে বই আছে, একটা লাল, একটা সবুজ, দুটো নীল। Fig 23 দ্যাখো। এদেরকে তাকের উপর পাশাপাশি দাঁড় করিয়ে রাখতে হবে। শর্ত খালি একটাই--অন্ততঃ একটা নীল বইকে এক প্রান্তে রাখতে হবে। এইখানে চুপিচুপি বলে রাখি--যে সব অংকে "অন্ততঃ একটা" কথাটা থাকে, সেগুলোতে ভুল করে overcounting করে ফেলার সম্ভাবনা খুব বেশী। আমরা পরে বিভিন্নধরণের "অন্ততঃ একটা"-ওয়ালা অংক নিয়ে আলোচনা করব। এখন আপাততঃ সহজ বুদ্ধিতেই এগোই।

SOLUTION: আমাদের বলেছে অন্ততঃ একটা নীল বই থাকবে এক প্রান্তে। সুতরাং--

- প্রথমে একটা প্রান্ত নির্বাচন করি যেখানে নীল বই রাখব। সেটা 2 ভাবে করা যায় (যেহেতু দুটো প্রান্ত আছে)।
- এবার সেই প্রান্তে কোন নীল বইটা রাখব, সেটা ঠিক করি। সেটাও 2 ভাবে করা যায়, কারণ দুটো নীল বই আছে।
- এবার লাল বইটাকে কোথাও একটা রাখি। 3 ভাবে করা যাবে, কারণ 3-টে জায়গাই ফাঁকা আছে।
- এখন যে দুটো ফাঁকা জায়গা পড়ে রইল তাদের কোথাও একটা সবুজ বইটাকে ঢুকিয়ে দাও। 2-ভাবে করা যাবে।
- বাকি আছে একটাই জায়গা, সেখানে অবশিষ্ট নীল বইটা ঢুকিয়ে দাও। সেটা 1-ভাবে করা সম্ভব।

সুতরাং multiplication principle থেকে উত্তর হচ্ছে

$$2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

এবার একই অংক আরেকভাবে করি। "অন্ততঃ একপ্রান্তে নীল বই" মানে তিনটে কেস হতে পারে--

1. বাঁ প্রান্তে নীল, ডান প্রান্তে নয়,
2. ডান প্রান্তে নীল, বাঁ প্রান্তে নয়,
3. দুই প্রান্তেই নীল।

প্রথম কেসে এইভাবে এগোই--

- বাঁ প্রান্তের জন্য একটা নীল বই নির্বাচন কর (2 ভাবে)।
- ডান প্রান্তের জন্য একটা অন্য রঙের বই নাও (2 ভাবে, লাল বা সবুজ)।
- বাকি নীলটাকে রাখার জন্য মাঝের জায়গাদুটোর একটা নির্বাচন কর (2 ভাবে),
- বাকি রইল একটাই বই, সেটাকে অবশিষ্ট ফাঁকা জায়গাটায় রাখা ছাড়া পথ নেই (মানে 1 ভাবে)।

অতএব multiplication principle লাগিয়ে পেলাম $2 \times 2 \times 2 = 8$.
একইরকম যুক্তিতে দ্বিতীয়ক্ষেত্রেও মোট সংখ্যা হবে 8 (বাঁ আর ডানের স্থানবিনিময় করে দাও, যুক্তিটা তাতে বদলাবে না!)।
তৃতীয় কেসের হিসেবটা এইরকম--

- বাঁদিকের জন্য একটা নীল বই নাও (2 ভাবে)

Fig 24

Fig 25

- অন্য নীল বইটা ডানদিকে রাখো (1 ভাবে)
- লাল বইটা রাখো মাঝের ফাঁকা জায়গাদুটোর কোনো একটায় (2 ভাবে)
- সবুজ বইটার জন্য খালি একটা জায়গাই পড়ে আছে, সেখানেই রাখতে হবে (1 ভাবে)

সুতরাং এই কেসে multiplication principle লাগালে হয় $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$.
সুতরাং তিনটে কেস মিলিয়ে মোট উত্তর হল $4 + 8 + 8 = 20$. ■

অন্তত একটা উত্তর ভুল আছে। কোনটা? নাকি দুটোই? সেটা বলব একটু পরে। আগে মন্ত্রীদের সমস্যাটা মিটিয়ে নিই।
ভুলটা করেছে বড় মন্ত্রী, একেবারে শেষ ধাপে, দ্বিতীয় পটির রং নির্বাচনের সময়ে। সেখানে যুক্তিটা ছিল এই যে, এই পটিটার উপরে এবং নীচে আগেই রং করা হয়ে গেছে, সুতরাং সেই দুটো রংকে বাদ দিয়ে খালি একটাই যে রংটা পড়ে আছে সেটাই দিতে হবে। কিন্তু এমন তো হতেই পারে যে ওই দুটো পটিতে একই রং ব্যবহার করা হয়েছিল, সেক্ষেত্রে দ্বিতীয় পটির জন্য খালি একটা নয়, দু-দুটো রং পড়ে আছে, যেমন Fig 24-এর ক্ষেত্রে দ্বিতীয় পটিটায় নীল আর সবুজ যেকোনোটাই ব্যবহার করা যাবে। সেটা বড় মন্ত্রীর হিসেবে ধরা নেই, তাই এখানে undercounting হচ্ছে।
বই রাখার অংকটায় ভুল রয়েছে প্রথম পদ্ধতিতে। দোষটা হল overcounting. আমরা প্রথমে একটা প্রান্ত নির্বাচন করছিলাম, মনে করো বাঁ প্রান্ত। সেখানে রাখলাম লম্বা নীল বইটা। তারপর লাল বইটা রাখছি, মনে করো দ্বিতীয় স্থানে। তারপর সবুজ বইটা রাখতে হবে, ধরো তৃতীয় স্থানে রাখলাম। সবশেষে বেঁটে নীল বইটা গেল অবশিষ্ট জায়গায়। ধাপগুলো যেভাবে করলাম সেটাকে লেখা যায়--

(বাঁ প্রান্ত, লম্বা নীল, লাল $\to$ দ্বিতীয়, সবুজ $\to$ তৃতীয়, অন্য নীল $\to$ অবশিষ্ট)।

এর ফলে সাজানোটা হচ্ছে Fig 25-এর মত। কিন্তু চাইলে আমরা এভাবেও করতে পারতাম--

(ডান প্রান্ত, বেঁটে নীল, লাল $\to$ দ্বিতীয়, সবুজ $\to$ তৃতীয়, অন্য নীল $\to$ অবশিষ্ট)।

এক্ষেত্রেও আমরা Fig 25-এই পৌঁছতাম। তার মানে এইভাবে রাখাটা একাধিকবার গোণা হয়ে যাচ্ছে।
এরকম overcounting এড়াবার একটা কায়দা হল কেসে কেসে ভেঙে করা, যেমন করেছিলাম বই সাজানোর দ্বিতীয় পদ্ধতিতে। এরকম আলাদা আলাদা কেসে ভেঙে প্রতিটা কেসের হিসেব করে বার করে সব শেষে যোগ করে দেওয়াকে বলব addition principle, যেটা আমরা একটু পরেই বিশদভাবে আলোচনা করব। তার আগে আরেক ধরণের ভুলের কথা বলি যার জন্য অনেক সময়ে overcounting হয়ে যায়। ধরো দুই ধরণের জিনিস আছে, এবং তাদের মধ্যে জোড় মেলাতে হবে। যেমন তিনটে ছেলে আর তিনটে মেয়ে আছে, তাদের মধ্যে বিয়ে দিতে হবে, বা চারটে বাক্সের মধ্যে চারটে বল রাখতে হবে, বা কয়েকটা চিঠিকে খামে ভরতে হবে, এইরকম। এসব ক্ষেত্রে কোনো একধরণের জিনিস ধরে ধরে এগোলে ঠিক থাকে, দুই ধরণের জিনিসই নির্বাচন করতে গেলে overcounting হয়ে যায়। একটা উদাহরণ দেখি।

Example 16: দুটো ছেলে আর দুটো মেয়ে আছে। এদের মধ্যে কতভাবে বিয়ে দেওয়া যায়?

SOLUTION: ছেলেদের নাম ধরো সুব্রত আর বিভাস, এবং মেয়েদের নাম ধরলাম মৌমিতা আর ইভা। তাহলে দেখাই যাচ্ছে এই দুইভাবে কাজটা করা যায়--

- সুব্রত আর মৌমিতার বিয়ে দাও, ওদিকে বিভাস আর ইভার,
- অথবা, সুব্রত আর ইভার বিয়ে, ওদিকে বিভাসের সাথে মৌমিতার।

এর মধ্যে কোনো overcounting নেই। এবার ভুল কায়দায় করি--

- একজন ছেলে নির্বাচন করো : 2-ভাবে করা যায়।
- তার জন্য একটা মেয়ে নির্বাচন কর : 2-ভাবে করা যায়।
- বাকি ছেলেটার সাথে বাকি মেয়েটার বিয়ে দিয়ে দাও : 1-ভাবেই করা যায়।

সুতরাং multiplication principle দিয়ে উত্তর হচ্ছে $2 \times 2 \times 1 = 4$.
এখানে ভুলটা ছিল এই যে আমরা ছেলে আর মেয়ে দুটোই নির্বাচন করছিলাম। ফলে overcounting হয়েছে। যেমন আমাদের ধাপগুলো যদি এইভাবে করতাম

(সুব্রত, মৌমিতা, বাকি দুজন),

তবেও যা হত, আর

(বিভাস, ইভা, বাকি দুজন)

করলেও ব্যাপারটা একই দাঁড়াত। এরকম overcounting এড়াবার কায়দা হল ছেলেদের জন্য একে একে পাত্রী নির্বাচন (বা মেয়েদের জন্য একে একে পাত্র নির্বাচন) করা--

- মৌমিতা কাকে বিয়ে করবে ঠিক কর : 2-ভাবে করা যায়।
- ইভার সাথে অন্য ছেলেটার বিয়ে দাও : 1-ভাবে করা যায়।

এবার multiplication principle লাগালে ঠিকঠাক $2 \times 1 = 2$ উত্তর পাবে। ■

এবার তোমার জন্যে কয়েকটা অংক দিই। সবগুলোরই একটা করে ভুল উত্তর দেওয়া আছে। তোমায় ভুলগুলো ধরতে হবে।

Exercise 27: মহাভারতের গল্পে তোমরা পড়েছ শকুনি যুধিষ্ঠিরকে পাশাখেলায় হারিয়ে দিয়েছিলেন। খেলাটা কি করে হয়েছিল জানো তো? প্রতিদানে দুটো করে অক্ষ চালা হত (মানে আমরা যাকে ছক্কা বলি, ছয় পিঠে $1, 2, ..., 6$ লেখা)। যে দুটো সংখ্যা পাওয়া যত তাদেরকে গুণ করে দেখা হত উত্তরটা জোড় হয় নাকি বিজোড়। জোড় হলে যুধিষ্ঠিরের জয়, বিজোড় হলে শকুনির। 2-টো ছক্কার প্রতিটাতেই 6 রকমের সংখ্যা আসতে পারে। সুতরাং 2-টো ছক্কা একসাথে চালার ফলাফল হতে পারে $6 \times 6 = 36$ রকম। এদের মধ্যে গুণফলটা জোড় হবে একমাত্র তখনই যখন অন্ততঃ একটা ছক্কা জোড় সংখ্যা দেখাবে। এইবার যুধিষ্ঠির ভাবতে বসলেন যে এই 36 রকম ক্ষেত্রের কোনগুলোতে তাঁর জয় হবে--

> *যদি প্রথম ছক্কাতে জোড় সংখ্যা পড়ে (সেটা হতে পারে 3-ভাবে), তবে দ্বিতীয় ছক্কাতে 6 রকম সংখ্যার যেটাই পড়ুক কিছু আসে যায় না, সুতরাং এই ক্ষেত্রে মোট $3 \times 6 = 18$ ভাবে আমি জিতছি। আর যদি দ্বিতীয় ছক্কাতে জোড় পড়ে তাহলেও একই যুক্তি খাটবে। সুতরাং সেখান থেকে পাচ্ছি আরও 18. তার মানে আমি জিতছি মোট $18 + 18 = 36$ রকম ক্ষেত্রে। অর্থাৎ কিনা আমি সবক্ষেত্রেই জিতছি!*

সুতরাং তিনি উৎসাহিত হয়ে শকুনিকে বললেন, "মামা, যতবার খুশি খেলো। একবারও যদি তুমি জিততে পারো তো আমি নাম ফিরিয়ে নাম রাখব।" শকুনি সস্নেহে বললেন, "ভাগ্নে, তোমার নাম তোমারই থাক, খালি সিংহাসনটুকু ছেড়ে দিলেই আমরা খুশি!" তারপর কি হয়েছিল সে তো ব্যাসদেব লিখেই গেছেন।
তুমি একটু যুধিষ্ঠিরকে বুঝিয়ে দেবে ওনার যুক্তির গলদটা কোথায়? যুক্তিটা যে ভুল সে তো বোঝাই যাচ্ছে, কারণ দুজনের ছক্কাতেই যদি 1 পড়ে, অমনি যুধিষ্ঠির হারবেন। সেটা মহাভারতের অভিজ্ঞতার পরে যুধিষ্ঠিরকে আর বলে দেওয়ার অপেক্ষা রাখে না। কিন্তু এখানে তোমার কাজ হল যুধিষ্ঠিরের চিন্তার মধ্যে কোন ধাপটা ভুল সেটা সনাক্ত করা। ■

Exercise 28: প্রশ্নটা ছিল--How many ordered pairs (m, n) of positive integers are there such that their LCM is 5^9? এইরকম অংক আমরা আগেই দেখেছি। একজন ছাত্র তার অনুকরণে এইভাবে ভাবছে--

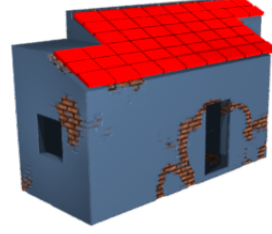
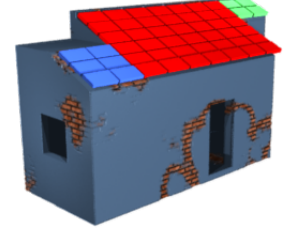



Fig 26 **Fig 27** **Fig 28**

> বোঝাই যাচ্ছে যে m, n দুজনেই 5-এর power হবে, মানে $m = 5^i$ আর $n = 5^j$. যেখানে $i, j \in \{0, 1, ..., 9\}$. এদের LCM হল 5^9, তাই i আর j-র মধ্যে অন্ততঃ একজনকে 9 হতেই হবে। এদের মধ্যে কাকে 9 রাখব সেটা 2-ভাবে ঠিক করা যায় (i-কে, নাকি j-কে), অন্যজন 0 থেকে 9 পর্যন্ত যা খুশি হতে পারে, মানে 10-ভাবে নেওয়া যায়। সুতরাং উত্তর আসছে $2 \times 10 = 20$.

এই যুক্তিতে একটা ভুল আছে। কোথায়? ■

Exercise 29: Fig 26-এ ভারতের মানচিত্রের একটা অংশ দেখা যাচ্ছে। মোট ছয়টা রাজ্য উঁকি দিচ্ছে সেখানে। এগুলোকে রং করার জন্য চারটে রং আছে। অবশ্যই দুটো পাশাপাশি রাজ্যকে একই রঙে রং করলে চলবে না। প্রশ্ন ছিল--কতভাবে করা যাবে? একজন উত্তর ভেবেছে এইরকম--

> প্রথমে মধ্যপ্রদেশের জন্য একটা রং নেব (4 ভাবে), তারপর তাকে ঘিরে যে পাঁচটা রাজ্য আছে, তাদের যে কোনো একটা নেব (5 ভাবে), এই রাজ্যটাকে রং করব (3-ভাবে, কারণ মধ্যপ্রদেশের রংটা আর লাগানো যাবে না)। এবার এই রাজ্যটা থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার মত মধ্যপ্রদেশকে ঘিরে এগোব[1]। প্রথম যে রাজ্যটা আসবে সেটাকে রং করব 2-ভাবে (আগের ব্যবহৃত রং দুটো বাদ দিয়ে)। তার পরের রাজ্যটাকেও 2 ভাবে রং করা যাবে, তার পরেরটাকেও তাই। এখন খালি একটা রাজ্যই পড়ে আছে যার তিনটে প্রতিবেশীই রং পেয়ে গেছে। সুতরাং এই রাজ্যটার জন্য $4 - 3 = 1$-টাই রং পড়ে আছে। অতএব উত্তর হচ্ছে $4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 480$.

এই যুক্তিতে দু-দুটো ভুল আছে। বার কর তো! ■

3.2 Addition principle

আমরা multiplication principle শিখেছি, এবার শিখব একইরকম আরেকটা কায়দা--addition principle. একটা সহজ উদাহরণ দিয়ে শুরু করি। **Example 17:** ধরো তোমাকে Fig 27-এ কটা টালি আছে গুণতে বললাম। কি করে করবে?

SOLUTION: একটা কায়দা তো অবশ্যই বাচ্চাদের মত ধরে ধরে সব কটা টালিকে গুণে ফেলা। বেশী টালি থাকলে সেটা কঠিন। Multiplication principle-ও লাগানো যাচ্ছে না, কারণ টালিগুলো একটা rectangle-এর আকারে নেই। কিন্তু টালিগুলোকে এখানে তিনটে গুচ্ছে ভাগ করা যায় (Fig 28-এ আলাদা রং করে দেখিয়েছি)। প্রতিটা গুচ্ছই একেকটা rectangle-এর মত, তাই ওদেরকে multiplication principle দিয়ে চট্ করে গুণে ফেলা যাবে। তারপর যোগ করে দিলেই হল! ■

[1] যেমন, উত্তরপ্রদেশ থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার মত এগোলে পরপর আসবে ছত্তিসগড়, মহারাষ্ট্র, গুজরাট, রাজস্থান।

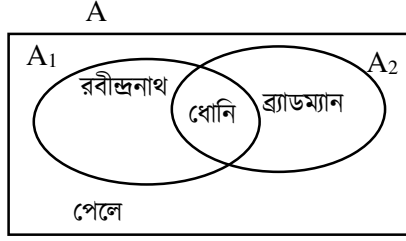



Fig 29

Fig 30

এটাই হল addition principle. খুবই সহজ জিনিস, তবে দুটো ব্যাপারে সাবধান। অংকের ভাষায় addition principle-কে লেখা যায় এইভাবে--ধরো তোমাকে কোনো একটা set দেওয়া আছে A, তোমাকে গুণতে হবে A-তে কতগুলো element আছে। এই সংখ্যাটাকে আমরা $|A|$ চিহ্ন দিয়ে বোঝাব। তার জন্য যদি A-কে কয়েকটা subset-এর union হিসেবে লেখা যায়--

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

যারা disjoint, মানে $i \neq j$ হলে $A_i \cap A_j = \phi$, তবে addition principle বলছে যে

$$|A| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

এখানে দুটো শর্তই কিন্তু দরকারী--A_i-রা মিলে যেন পুরো A-টা পাওয়া যায় (নইলে undercounting হবে), এবং A_i-গুলো যেন disjoint হয় (নইলে overcounting হবে)। যেমন ধরো যদি A হয় Fig 29-এর মত, আর A_1 নিই ভারতীয়দের set, আর A_2 নিই ক্রিকেটারদের set, তবে "$|A| = |A_1| + |A_2|$" বললে হিসেব মোটেই মিলবে না। এখানে একই সঙ্গে overcounting আর undercounting দুটোই হচ্ছে। যেহেতু $A_1 \cap A_2 = \{$ ধোনি $\}$, সুতরাং ধোনি দুবার গোণা হয়ে যাচ্ছে (overcounting). আবার পেলে কোনো A_i-তেই পড়েন নি, তাই তিনি বেমালুম হিসেব থেকে বাদ পড়ে গেছেন (undercounting).

Example 18: দিল্লী থেকে নিউ ইয়র্ক যাবার সময়ে প্লেনটা মাঝে কোথাও একটা একবার দাঁড়িয়ে নেয়। এরকম দাঁড়ানোর কয়েকটা জায়গা হল প্যারিস, ফ্রাংকফুর্ট, আমস্টার্ডাম। Fig 30-এ দেখিয়েছি বিভিন্ন এয়ারপোর্টের মধ্যে কতগুলো ফ্লাইট আছে। যেমন দিল্লী থেকে প্যারিস পর্যন্ত দুটো লাইন আছে, কিন্তু ফ্রাংকফুর্ট যাবার জন্য আছে তিনটে লাইন। প্রশ্ন হল কতভাবে তুমি দিল্লী থেকে নিউ ইয়র্ক যেতে পারো।

SOLUTION: এখানে আমরা তিনটে কেসে ভেঙে নেব, প্লেনটা কোথায় দাঁড়াচ্ছে তার উপর নির্ভর করে।

1. যদি প্যারিসে দাঁড়ায় তবে multiplication principle লাগিয়ে উত্তর হবে $2 \times 3 = 6$.
2. যদি ফ্রাংকফুর্টে দাঁড়ায় তবে $3 \times 1 = 3$.
3. যদি আমস্টার্ডামে দাঁড়ায় তবে $1 \times 2 = 2$.

এবার addition principle লাগিয়ে উত্তর পাচ্ছি $6 + 3 + 6 = 15$. ■

এবার একটা অংক দিই, যেটা করে তুমি মজা পাবে। এর জন্য আমি ধরে নিচ্ছি যে তুমি দুটো matrix-কে তুমি গুণ করতে জানো।

Exercise 30: এটাও আগের অংকটারই মত, খালি শুরুটা দিল্লী না হয়ে কলকাতাও হতে পারে। ওদিকে শেষটাও হতে পারে নিউ ইয়র্ক ছাড়াও ফিলাডেলফিয়ায়। দুটো তালিকা দিলাম, প্রথমটা বলছে কতভাবে তুমি ভারত থেকে ইয়োরোপে যেতে পারো, আর দ্বিতীয়টা বলছে কতভাবে ইয়োরোপ থেকে আমেরিকায় যেতে পারো। এর মধ্যে লাল সংখ্যাগুলো আগের অংকেই ছিল।

	প্যারিস	ফ্রাংকফুর্ট	আমস্টার্ডাম
দিল্লী	2	3	1
কলকাতা	1	1	2

	নিউ ইয়র্ক	ফিলাডেলফিয়া
প্যারিস	3	1
ফ্রাংকফুর্ট	1	4
আমস্টআর্ডাম	2	3

তোমার কাজ হল নীচের মত একটা টেবিল বানানো যেটা বলবে কতভাবে ভারত থেকে আমেরিকায় যাওয়া যায়--

	নিউ ইয়র্ক	ফিলাডেলফিয়া
দিল্লী	15	
কলকাতা		

প্রথম দুটো টেবিলকে যথাক্রমে A আর B নামের দুটো matrix বলে মনে করো, এবং ওদের গুণ করে BA বার করো। কি পাচ্ছ? যদি AB বার করতে? ■

এই যে আমরা multiplication, addition ইত্যাদি বিভিন্ন principle-এর কথা শিখছি, এ থেকে যেন মনে করে বোসো না যে, একটা অংক দেখলেই ধাঁ করে বুঝে ফেলা যায় কোন principle-টা কোথায় লাগাতে হবে। একটা অংক পেলে সেটাকে প্রথমে অত সব principle-টিন্সিপল্ ভুলে সহজ বুদ্ধিতে চেষ্টা করাই ভালো। তাতেই সাধারণতঃ অংকটার নিজস্ব বৈশিষ্ট্যগুলো সহজে ধরা দেয়। ঠিক যেমন একটা নতুন মানুষের সঙ্গে প্রথম আলাপে সহজভাবে কথা বললে তাকে বুঝতে সুবিধা হয়। খামোখা যদি যান্ত্রিকভাবে "আপনি কি খেতে ভালোবাসেন? কি পরতে ভালোবাসেন? আপনার কি কান কট্‌কট্ করে?"-গোছের বাঁধা গতের প্রশ্ন করতে শুরু কর তাতে মানুষটাকে চেনা যাবে না। নীচের অংকটা করলে ব্যাপারটা ভালো করে বুঝবে। অংকটা function নিয়ে, সেটা কি জিনিস যদি জানা না থাকে তবে একটু বলে নিই।
ধরো দুটো set আছে Fig 31-এর মত। এখানে A থেকে B-তে একটা function মানে মনে করো কিছু তীর চিহ্ন Fig 32(i)-এর মত। তীরগুলো সব বেরোবে A-র element-দের থেকে এবং শেষ হবে B-র element-এ গিয়ে। শর্ত খালি একটাই-- A-র প্রতিটা element থেকে ঠিক একটা করেই তীর বেরোবে। তাই Fig 32(ii)-এর ছবিটা কিন্তু একটা function-এর ছবি নয়। আর কোনো শর্ত নেই, B-এর প্রতিটা element-এই তীর পৌঁছতে হবে, এমন কথা নেই। আবার B-এর কোনো element-এ একাধিক তীর পৌঁছলেও আপত্তি নেই। কিন্তু যদি আমরা বাড়তি শর্ত চাপাই যে B-এর কোনো element ফাঁকা থাকতে পারবে না, তবে সেরকম function-কে বলব একটা onto function. একটা উদাহরণ রয়েছে Fig 33(i)-এ। আর যদি বাড়তি শর্তটা নিই এইরকম যে, কোনো দুটো তীর এক জায়গায় শেষ হতে পারবে না, তবে সেটা হবে একটা one-one function (Fig 33(ii))। যদি দুটো শর্তই এক সঙ্গে থাকে তবে ছবিটা হবে Fig 33(iii)-এর মত। এত সাতকাহন করে তীরচিহ্ন-টিহ্ন এঁকে যে গল্পটা বললাম সেটা কিন্তু আমরা চারপাশে হামেশাই দেখে থাকি। যেখানেই জোড় বাঁধার

Fig 31

A B

Fig 32

(i)
A B
একাধিক তীর এসেছে, আপত্তি নেই.
কোনো তীর আসেনি, আপত্তি নেই.

একাধিক তীর বেরিয়েছে, চলবে না.
কোনো তীর বেরোয়নি, চলবে না.
A B
(ii)

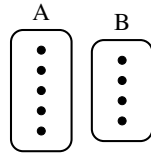
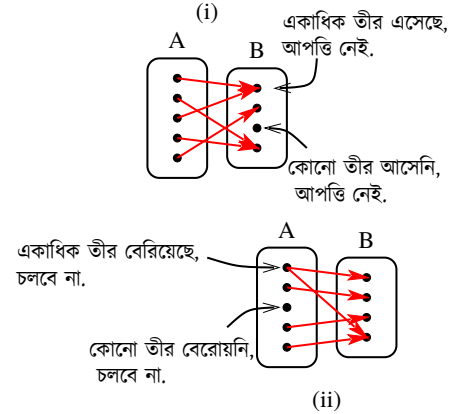
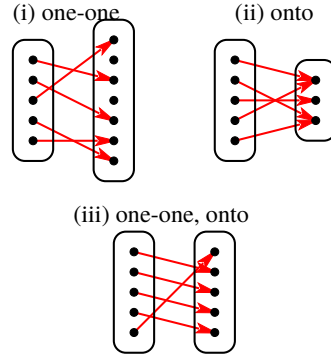



Fig 33

ব্যাপার সেখানেই একটা করে one-one, onto function লুকিয়ে আছে জানবে। যেমন যখন তুমি জামার বোতাম আটকাও, তখন আসলে বোতামের set থেকে বোতামঘরের set-এ একটা one-one, onto function নাও। যখন বুটজুতোয় ফিতে পরাও তখন বাঁ ধারের ফুটোগুলোর সঙ্গে ডান ধারের ফুটোগুলোর একটা one-one, onto function গড়ে ওঠে (সাধারণতঃ সেটা দেখতে হয় Fig 33(iii)-এর মত)।

Example 19: Consider all functions $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ which are one-one, onto and satisfy the following property:

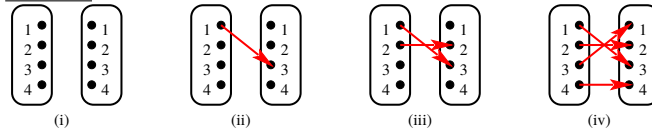
if $f(k)$ is odd, then $f(k+1)$ is even, $k=1,2,3$.

The number of such functions is

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

(ISI2012.6)

SOLUTION: এরকম একটা অংক দেখে দিশাহারা লাগা স্বাভাবিক। এসব ক্ষেত্রে শুরু করার একটা ভালো কায়দা হল যে জিনিসগুলো গুণতে দিয়েছে (মানে ওই বিদঘুটে শর্তওয়ালা function-গুলো) তাদের কয়েকটাকে এঁকে ফেলা। এখানে set-দুটোই হল $\{1,2,3,4\}$. অতএব ছবিটা শুরু হবে Fig 34-এর মত। একটা তীর আঁকি 1 থেকে, ধরো 3-এ গেল। মানে $f(1)=3$. এরপর যদি 2 থেকে তীর আঁকি, তবে শর্তটার কথা মনে রাখতে হবে। সহজ বাংলায় শর্তটা হল--কোনো তীর যদি বিজোড়ে যায়, তবে তার পরের তীরটা জোড়ে শেষ হবে। সুতরাং 2 থেকে আঁকা তীরটা কোনো জোড় সংখ্যায় যেতে হবে, ধরো 2-এ গেল। যেহেতু এটা জোড়ে গেল, তাই এর পরের তীর কোথায় শেষ হবে তা নিয়ে কোনো শর্ত নেই, ধরো 1-এ পাঠালাম। এবার 4 থেকে 4-এ তীর আঁকা ছাড়া পথ নেই। সুতরাং আমরা একটা f পেলাম যেটা আমাদের শর্তগুলো মেনে চলে। লক্ষ কর যে আমাদের কাজে লাগছিল খালি একটাই জিনিস--তীরগুলোর শেষপ্রান্তে জোড় আছে নাকি বিজোড় আছে। আমাদের উদাহরণে যেমন জোড়, বিজোড়ের প্যাটার্ণটা হল বিজোড়, জোড়, বিজোড়, জোড়। শর্তটা বলেছিল যে দুটো বিজোড় কখনও পরপর থাকতে পারবে না।

Fig 34

> We notice that $f(1), f(2), f(3), f(4)$ are just $1, 2, 3, 4$ in some order such that no two odd numbers are consecutive. As there are exactly two odd and two even numbers, hence we must have one of the following three patterns:
>
> - Odd, Even, Odd, Even
> - Odd, Even, Even, Odd
> - Even, Odd, Even, Odd

এই তিনটে ছাড়া যে আর এরকম প্যাটার্ণ সম্ভব নয় সেটা চোখে দেখেই বুঝলাম।

> In each case the odd numbers can be arranged among themselves in 2 ways.
>
> Similarly, the even numbers can be arranged among themselves in 2 ways.
>
> So, by multiplication principle, the answer is $3 \times (2 \times 2) = 12$.

■

এবার তোমার জন্য একটা একইরকম অংক।

Exercise 31: Consider all functions $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ which are one-one, onto and satisfy the following property:

$f(k)$ is odd if and only if $f(k+1)$ is even, $k = 1, 2, 3$.

Find the number of such functions. ■

DAY 4
বিয়োগ আর ভাগের সূত্র

4.1 Subtraction principle

Multiplication principle শিখেছি, addition principle শিখেছি, এবার শিখব একইরকম আরেকটা কায়দা-- subtraction principle. যে সব অংকে "অন্ততঃ একটা"-জাতীয় কথা থাকে সেগুলোকে আক্রমণ করার অমোঘ অস্ত্র হল এই subtraction principle. একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 20: Fig 35-এ মোট কতগুলো টালি রয়েছে?

SOLUTION: টালিগুলো মোটামুটিভাবে একটা rectangle-এর মতই ছিল, যার সাইজ 5×7. সুতরাং দিব্যি multiplication principle লাগিয়ে উত্তর পেতাম 35. কিন্তু সমস্যা হয়েছে ওই চিমনিটা নিয়ে। ওইখানটায় কোনো টালি নেই। লক্ষ কর যে চিমনির দরুণ ফাঁকটা খুব বড় নয়, খালি $2 \times 2 = 4$-টে টালি বাদ পড়েছে। সুতরাং টালির সংখ্যা হল $35 - 4 = 31$. ■

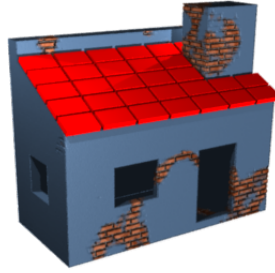



Fig 35

এটাই হল subtraction principle. এর মূল কথা হল এই--যে জিনিসগুলো গুণতে বলা হয়েছে, তার চেয়ে বেশী কিছু জিনিস গুণতে অনেক সময়ে সুবিধা হয় (যেমন চিমনির জায়গাটায় টালি কল্পনা করে নিলে multiplication principle লাগানো যাচ্ছিল), তখন সেই বাড়তি জিনিসগুলো সুদ্ধ গুণে, তারপর বাড়তি জিনিসের সংখ্যাটা বিয়োগ করে দেওয়া।
একটা অংক কষা যাক।

Example 21: একটা ক্লাসে তিনটে মেয়ে আর পাঁচটা ছেলে আছে। এদের থেকে মধ্যে থেকে তিন জনকে পুরস্কার দিতে হবে। একজন পাবে সোনার মেডেল, একজন রূপোর মেডেল, আর তৃতীয়জন পাবে ব্রোঞ্জের মেডেল। আর হ্যাঁ, অন্ততঃ একটা মেয়ে যেন কিছু একটা মেডেল পায়। কতভাবে দেওয়া যাবে?

SOLUTION: এই রকম "অন্ততঃ একটা" জাতীয় শর্ত থাকলে subtraction principle-টা খুব কাজে আসে। প্রথমে শর্তটা বাদ দিয়ে দেখি কতভাবে করা যায়--

> 1. Pick a student for the gold medal: 8 ways.
> 2. Pick another student for the silver medal: $8-1=7$ ways.
> 3. Pick another student for the bronze medal: $7-1=6$ ways.
>
> So, by the multiplication principle, the total number of ways to choose 3 students for the prizes is $8\times 7\times 6$.

এর মধ্যে যে সব ক্ষেত্রে কোনো মেয়ে কোনো মেডেল পায় নি (মানে ছেলেরাই সব মেডেল পেয়েছে) সেগুলোও ধরা হয়ে গেছে। সেগুলো এবার বাদ দিতে হবে। এই সংখ্যাটাও ঠিক আগের মতই বার করা যাবে, খালি এবার হিসেবে মেয়েদের ধরব না। অর্থাৎ "অন্ততঃ একটা মেয়ে" শর্তটাকে উলটে করে নিলাম "একটাও মেয়ে নয়"। সেই সংখ্যাটা বিয়োগ করতে হবে।

> From this we have to subtract the number of ways where all the prizes go to the boys.
>
> 1. Pick a boy for the gold medal: 5 ways.
> 2. Pick another boy for the silver medal: $5-1=4$ ways.
> 3. Pick another boy for the bronze medal: $4-1=3$ ways.
>
> So, by the multiplication principle, the total number of ways to choose 3 Boys for the prizes is $5\times 4\times 3$.

এবার বিয়োগ করলেই হল--

> Hence, by the subtraction principle, the answer is
>
> $$8 \times 7 \times 6 - 5 \times 4 \times 3 = \cdots = 276.$$

■

এরকম "অন্ততঃ একটা" জাতীয় বহু অংক করা যায় subtraction principle কাজে লাগিয়ে। আগেই বলেছি যে এই জাতীয় অংকে overcounting হয়ে যাওয়ার সম্ভাবনা খুব বেশী। ধরো এই পুরস্কারের অংকটাই ভুল কায়দায় করছি। তোমাকে ভুলটা ধরতে হবে।

> অন্ততঃ একটা মেয়েকে পুরস্কার দিতেই হবে। সুতরাং প্রথমে একটা মেয়েকে নির্বাচন করি, সেটা 3 ভাবে করা যায়। এবার ঠিক করি তাকে কি পুরস্কার দেব। সেটাও 3 ভাবে করা যায়। বাকি আছে দুটো পুরস্কার আর $8-1=7$-টা ছেলেমেয়ে। বাকি পুরস্কারের একটার জন্য 7 ভাবে কোনো একজনকে নির্বাচন করা যায়। অন্যটার জন্য $7-1=6$ ভাবে। সুতরাং multiplication principle লাগিয়ে উত্তর হচ্ছে $3 \times 3 \times 7 \times 6 = 378$.

কিন্তু এক্ষুণি আমরা উত্তর পেয়েছি 276. ভুলটা কোথায়? প্রথমে নিজে চিন্তা করে নাও। তারপর নীচের ব্যাখ্যাটা পড়। এখানে আসলে overcounting হয়ে যাচ্ছে। প্রথমে আমরা একটা মেয়েকে নির্বাচন করছিলাম, ধরো তার নাম মৌমিতা। দ্বিতীয় ধাপে তার জন্য একটা পুরস্কার ঠিক করছিলাম, ধরো সোনার মেডেল। বাকি মেডেলগুলো আমরা বাকি যে কোনো দুজনকে দিচ্ছিলাম--মনে করো রূপোর মেডেলটা পেল অদিতি, আর ব্রোঞ্জটা গেল বিভাসের কাছে। পুরো নির্বাচনপ্রক্রিয়ার চারটে ধাপকে এইভাবে লেখা যাক--

> মৌমিতা, সোনা, রূপো $\to$ অদিতি, ব্রোঞ্জ $\to$ বিভাস।

কিন্তু আমরা তো এভাবেও করতে পারতাম--প্রথম নির্বাচিত মেয়েটা হল অদিতি, তার জন্য নির্বাচিত মেডেলটা হল রূপো, বাকি মেডেলগুলোর মধ্যে সোনাটা পড়ল মৌমিতার ভাগ্যে, আর ব্রোঞ্জটা এবারও গেল বিভাসের কাছেই। মানে এবার নির্বাচনপ্রক্রিয়াটা দাঁড়াল--

> অদিতি, রূপো, সোনা $\to$ মৌমিতা, ব্রোঞ্জ $\to$ বিভাস।

বুঝতেই পারছ যে এই দুটো নির্বাচনপ্রক্রিয়া আলাদা করে গোণা হচ্ছে। অথচ দুই ক্ষেত্রেই তো ফলাফলটা একই--মৌমিতা সোনা, অদিতি রূপো আর বিভাস ব্রোঞ্জ। তার মানে এই কেসটা একাধিক বার গোণা হয়ে যাচ্ছে!
আরও কয়েকটা "অন্ততঃ একটা"-জাতীয় অংক করি যেগুলোকে subtraction principle দিয়ে কব্জা করা যায়। প্রতিক্ষেত্রেই কায়দাটা একই--প্রথমে "অন্ততঃ একটা" শর্তটা বাদ দিয়ে হিসেব কর, তার পর দ্যাখো "অন্ততঃ একটা"-কে উল্টে "একটাও নয়" করে দিলে গুণতি কত দাঁড়ায়। সেটা বিয়োগ করে দিলেই উত্তর পেয়ে যাবে।

Exercise 32: একটা পুকুরে বারোটা পদ্ম পাতা আছে, গোলাকারে সাজানো। ধরো ওদের নাম দিলাম $1, 2, \ldots, 12$. একটা ব্যাং 1 নম্বর পাতায় বসে আছে। প্রত্যেক ধাপে ব্যাংটা এক লাফে একটা পাতা থেকে অন্য যে কোনো একটা পাতায় গিয়ে বসতে পারে। তাহলে প্রথম 10 ধাপে ও কতভাবে লাফালাফি করতে পারে যাতে ও অন্ততঃ একবার 12 নম্বর পাতায় যায়?
HINT:
প্রথমে "অন্ততঃ একবার" শর্তটা ভুলে গিয়ে করি--

ব্যাংটা যেখানেই থাকুক প্রত্যেক ধাপে ও লাফ দিতে পারে [a]-ভাবে। এরকম লাফ ও দিচ্ছে 10 বার, তাই মোট [b]-ভাবে প্রথম 10-টা লাফ দিতে পারে।
এবার "অন্ততঃ একটা"-কে উলটে "একটাও নয়" করব, মানে কতভাবে লাফাতে পারে যাতে কখনোই 12 নম্বর পাতায় না বসে। সেটাও আগের মতই করা যাবে। এবার প্রত্যেক ধাপে ব্যাংটা লাফ মারতে পারে [c]-ভাবে। সুতরাং প্রথম 10-টা লাফ ও দিতে পারে [d]-ভাবে।

অতএব subtraction principle লাগিয়ে উত্তর হল $\boxed{}$। ■

এবার একই ব্যাংকে নিয়ে আরেকটা অংক।

Exercise 33: কতভাবে ব্যাংটা প্রথম 5-টা লাফ দিতে পারে, যাতে অন্ততঃ একবার কোনো even সংখ্যাওয়ালা পাতায় গিয়ে বসে? ■

এবার একটু কঠিন অংক।

Exercise 34: এক নম্বর পাতা থেকে শুরু করে ব্যাংটা কতভাবে 10-টা লাফ দিতে পারে, যাতে ও অন্ততঃ একবার এক নম্বর পাতায় ফিরে আসে। ■

Exercise 35: A car is going down a road with 10 crossings. At each crossing it may face a red or yellow or green signal. In how many ways can the signals occur so that the car faces at least one red signal? ■

Exercise 36: In this problem we assume that a year consists of exactly 365 days. Find the number of ways in which there is at least one repeated birthday among a group of 100 people. ■

4.2 Division principle

আমরা multiplication principle আলোচনা করার সময়ে শাখার থেকে প্রশাখা, তা থেকে প্র-প্রশাখা, ইত্যাদি ডালপালা ছাড়াচ্ছিলাম। যতই ডালপালা ছড়ায় ততই উত্তরটা গুণ হতে হতে বেড়ে যায়। কিন্তু এই কায়দায় এগোলে অনেক সময়ে ডালপালা এত বেড়ে যায় যে একটু ছেঁটে দেবার দরকার পড়ে। তার জন্য প্রধান হাতিয়ার হল division principle, যেটা এবার শিখব। প্রথমে একটা অতি সহজ উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 22: আবার একটা আমের অংক। Fig 36 দ্যাখো। দুটো শাখা, প্রতিটা থেকে তিনটে প্রশাখা, তার প্রতিটা থেকে দুটো করে আম। এই অবধি আগের মতই। কিন্তু এবার আমাদের কাজ হল আমগুলোকে ঝুড়িতে ভরে ফেলা। প্রতিটা ঝুড়িতে ঠিক দুটো করে আম ধরে। আমাদের আগ্রহ আমের সংখ্যা নিয়ে নয়, আমরা জানতে চাই কটা ঝুড়ি লাগবে।

SOLUTION: যদিও আমাদের প্রধান মাথাব্যথা ঝুড়ির সংখ্যা নিয়ে, আমের সংখ্যা নিয়ে নয়, তাও প্রথমে আমের সংখ্যাটা বার করে নিলেই সুবিধা হবে। সেই সংখ্যাটা mutiplication principle দিয়েই বার করা যাবে, $2 \times 3 \times 1 = 6$. কিন্তু যেহেতু একাধিক আম একই ঝুড়িতে যাচ্ছে, তাই ঝুড়ির সংখ্যা হবে এর চেয়ে কম। প্রতি ঝুড়িতে ঠিক দুটো করে আম রাখছি,

Fig 36

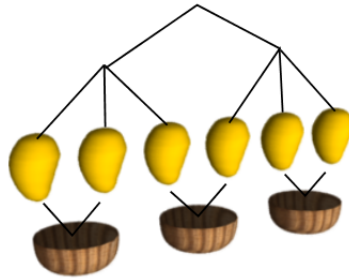
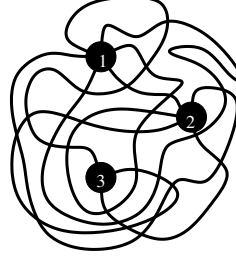



Fig 37

তাই ঝুড়ির সংখ্যা হবে $6/2 = 3$. এইটাই হল division principle. লক্ষ কর যে mutiplication principle লাগানোর জন্য যেমন প্রতিটি শাখা থেকে সমান সংখ্যক প্রশাখা বেরোনোর দরকার, তেমনি division principle লাগানোর জন্য প্রতিটা ঝুড়িতে সমান সংখ্যক আম থাকা দরকার। ■

এই উদাহরণটা ভালো করে খুঁটিয়ে দেখা যাক। আমাদের কাজ ছিল ঝুড়ি গোণা, কিন্তু সরাসরি সে কাজটা না করে আমরা প্রথমে আমের সংখ্যা গুণলাম। আম এখানে ঝুড়ির থেকে বেশী "সূক্ষ্ম" জিনিস, বা বলা যায় যে ঝুড়ি হল আমের চেয়ে বেশী "স্থূল" জিনিস। এই ব্যাপারটা অনেক সময়েই লক্ষ করা যায়--গুণতে চাই কোনো স্থূল জিনিস, কিন্তু তার চেয়ে বেশী সূক্ষ্ম কোনো জিনিস সহজে গোনা যায়। যদি এমন হয় যে প্রতিটা স্থূল জিনিসেই ঠিক সমান সংখ্যক সূক্ষ্ম জিনিস আছে, তবে division principle দিয়ে উত্তর বার করা যায়।
বর্ণনা শুনেই আন্দাজ করতে পারছ যে এটা mutiplication principle-এর চেয়ে একটু বেশী জটিল। উদাহরণ দেখলে এর মাহাত্ম্য বুঝতে পারবে। কিন্তু তার আগে subtraction principle আর division principle-এর মধ্যে একটা তুলনা করে নিই। এরা দুজনেই overcounting-এর প্রতিষেধক। কোন ওষুধটা কখন লাগে মনে রেখো--

- যা যা গুণতে হবে তার বাইরেও যদি কিছু বাড়তি গুণে ফেলে থাকো, তবে তার প্রতিষেধক হল subtraction principle.
- যদি বাইরের জিনিস নাও গুণে থাকো, কিন্তু ভিতরের জিনিসেরই অল্প কয়েকটাকে একাধিকবার গুণে থাকো, তাহলেও subtraction principle কাজে দেবে।
- আর যদি প্রত্যেকটা জিনিসই একাধিকবার কিন্তু ঠিক সমান সংখ্যক বার গোণা হয়ে গিয়ে থাকে, তবে সেই overcounting থেকে রক্ষা করবে division principle.

কয়েকটা অংক দেখলে ব্যাপারটা স্পষ্ট হবে।

Example 23: কোনো একজায়গায় তিনটে প্রধান মোড় আছে। Fig 37-এ একটা ম্যাপ দেখিয়েছি যেখানে এই তিনটে মোড় কালো গোল হিসেবে আঁকা আছে। লাইনগুলো হল ওদের মধ্যে বিভিন্ন রাস্তা। তোমার কাজ হচ্ছে মোট কটা রাস্তা আছে গুণে ফেলা।
SOLUTION: একটা কায়দা অবশ্যই ম্যাপ দেখে এক এক করে রাস্তাগুলো গুণ ফেলা। কিন্তু রাস্তাগুলো যেরকম বিচ্ছিরিরকমের প্যাঁচানো তাতে সেই কাজটা মোটেই সহজ নয়। এর চেয়ে একটা সহজ কায়দা হল division principle লাগানো, এইভাবে--প্রথমে গুণে দ্যাখো প্রত্যেকটা মোড়ে কতগুলো করে রাস্তা মিশেছে। এখানে 2-নম্বর মোড়টা হল পাঁচমাথার মোড়, 1-নম্বরে মিশেছে 6-টা রাস্তা, আর 3-নম্বরে গেছে মোটে তিনটে। সুতরাং এটা বলা কি সঙ্গত হবে যে মোট রাস্তার সংখ্যা হল $5+6+3 = 14$? না, কারণ এইভাবে যেটা পাওয়া গেল সেটা রাস্তার প্রান্তের মোট সংখ্যা। যেহেতু যেকোনো রাস্তারই ঠিক দুটো করে প্রান্ত আছে, তাই রাস্তার সংখ্যা হবে $14/2 = 7$. ■

এখানে স্থূল জিনিসটা ছিল রাস্তা, আর সূক্ষ্ম জিনিসটা ছিল রাস্তার প্রান্ত। এই ধারণাটার ভিত্তিতে একটা চট জল্‌দি ঠকানো ধাঁধা দিই।

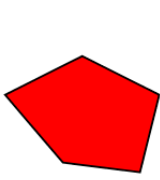
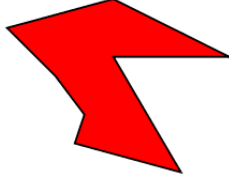
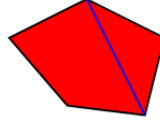
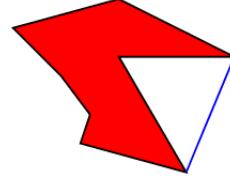



Fig 38 **Fig 39** **Fig 40** **Fig 41**

Exercise 37: এমন একটা ম্যাপ আঁকো যেখানে চারটে মোড়, প্রথমটায় চারটে রাস্তা মিশেছে, দ্বিতীয়টায় তিনটে, তৃতীয়টায় ছয়টা এবং চতুর্থটায় দুটো। ■

Example 24: By a diagonal of a convex polygon, we mean a line segment between any two non-consecutive vertices. The number of diagonals of a convex polygon of 8 sides is

(A) 15 (B) 20 (C) 28 (D) 35

(BMath2011.12)

SOLUTION: এখানে কয়েকটা শব্দ আছে, যেগুলো অপরিচিত লাগতে পারে। "Polygon" মানে বাংলায় যাকে বহুভুজ বলে, যেমন Fig 38 আর Fig 39-এ দেখিয়েছি। এদের মধ্যে Fig 38-টা দেখতে বেশ গোলগাল, কোথাও Fig 39-এর মত খাঁজ বা তোবড়ানো নেই। এরকম polygon-কে বলে "convex". যদি একটা convex polygon নাও, আর যেকোনো দুটো vertex (শীর্ষবিন্দু) যোগ কর (যারা nonconsecutive, অর্থাৎ পাশাপাশি নয়) তবে একটা diagonal (কর্ণ) পাবে। Fig 40 দ্যাখো। এর জন্য অবশ্য convex না হলেও চলত। কিন্তু সেক্ষেত্রে diagonal-টা polygon-এর বাইরে চলে যেতে পারত, যেটা একটু দৃষ্টিকটু (Fig 41)। সেই জন্যেই এই অংকে convex শর্তটা চাপিয়েছে। এইবার অংকটা ঠিক ম্যাপের অংকটার মতই। Vertex-গুলো যেন মোড়, আর diagonal-গুলো তাদের মধ্যে রাস্তা।

> From each vertex we can draw $8-3=5$ diagonals (as the other end point can be any vertex except the starting vertex and its two neighbours).

এইবার division principle লাগাতে হবে--

> So we get $8\times 5=40$. But each diagonal is counted exactly twice (once from each end). So the answer is $40/2=20$.

■

দুটো মোড়ের মধ্যে রাস্তাই বল, আর দুটো vertex-এর মধ্যে diagonal-ই বল, division principle-এর প্রয়োগটা দুইক্ষেত্রেই একই--প্রত্যেকটা জিনিস দুবার করে গোণা হয়ে যাচ্ছিল, তাই দুই দিয়ে ভাগ করে সেই overcounting-এর মোকাবিলা করা হল। নীচের অংকটাও একইরকম।

Exercise 38: একটা অনুষ্ঠানে মোট 5 জন উপস্থিত ছিল। সবাই সবার সঙ্গে একবার করমর্দন করেছে। তবে প্রত্যেকে কতগুলো করমর্দন করেছে? মোট করমর্দনের সংখ্যা কত? ■

Example 25: Consider six players $P_1, P_2, P_3 P_4, P_5$ and P_6. A team consists of two players. (Thus, there are 15 distinct teams.) Two teams play a match exactly once if there is no common

player. For example, team $\{P_1, P_2\}$ cannot play with $\{P_2, P_3\}$, but will play $\{P_4, P_5\}$. Then the total number of possible matches is

(A) 36 (B) 40 (C) 45 (D) 54

(ISI2013.20)

SOLUTION:

> There are 15 teams. Each team plays with 6 teams. For example, $\{P_1, P_2\}$ plays with $\{P_3, P_4\}$, $\{P_3, P_5\}$, $\{P_3, P_6\}$, $\{P_4, P_5\}$, $\{P_4, P_6\}$ and $\{P_5, P_6\}$.
>
> But in this way each game is counted exactly twice. So the required number of games is
>
> $$\frac{15 \times 6}{2} = 45.$$

■

Example 26: The number of rectangles that can be obtained by joining four of the twelve vertices of a 12 sided regular polygon is (A) 66 (B) 30 (C) 24 (D) 15. **(KVPY.SB/SX.2010)**

SOLUTION: এই অংকটা কিভাবে শুরু করতে হবে সেটা ঠিক বোঝা যাচ্ছে না। এরকম অবস্থায় একটা ভালো অভ্যাস হল যে জিনিসগুলো গুণতে বলেছে তাদের কয়েকটা উদাহরণ নেওয়া। এক্ষেত্রে উদাহরণ নেওয়া মানে এরকম কয়েকটা rectangle-এর ছবি আঁকা। তার জন্য আগে একটা 12-টা side-ওয়ালা polygon আঁকতে হবে। সেটা খালি হাতে আঁকা সহজ নয়, কিন্তু আমাদের একটা কাজচলা গোছের আদল পেলেই হল। তাই আমরা 12 side-ওয়ালা polygon-এর বদলে একটা গোল এঁকে তার মধ্যে একটা rectangle ঢোকাব। এরকম বার কয়েক আঁকলেই দেখবে rectangle-টা সবসময়েই মাঝামাঝি জায়গায় আঁকতে হচ্ছে, যদি এক ধারে আঁকতে যাও তবে মুখোমুখি বাহুগুলোকে parallel (সমান্তরাল) রাখা যাচ্ছে না। এই ব্যাপারটা একবার চোখে পড়লেই এর কারণটাও বুঝতে পারা উচিত। যেহেতু rectangle-এর কোণগুলো সব $90°$, তাই ওরা এককেটা semicircle-এর মধ্যে থাকতে বাধ্য, মানে rectangle-এর প্রতিটা diagonal অবশ্যই circle-টার এককেটা diameter হবে। যাই হোক এই একই ব্যাপার 12 side-ওয়ালা polygon-এর ক্ষেত্রেও হবে। Rectangle-টা যেভাবেই আঁকো না কেন যদি ওকে $ABCD$ নাম দাও তবে A আর Cথাকবে মুখোমুখি আর B, D-ও হবে পরস্পরের মুখোমুখি। সুতরাং A আর B নির্বাচন করলেই C আর D-ও আপনা থেকেই নির্ধারিত হয়ে যাবে। যেমন ধরো যদি A নাও 1 নম্বর vertex-টা আর B নাও 2 নম্বরটা তাহলে C-কে 7 হতেই হবে, আর D-কে 8 হতেই হবে। আরও লক্ষ কর যে আমরা $ABCD$ নিয়েছিলাম clockwise-ভাবে। ফলে A-কে 1 নেওয়ার পর B-কে 2 থেকে 6-এর মধ্যেই হতে হবে।

> Let the vertices of the 12-gon be labelled clockwise by the numbers $1, 2, ..., 12$. Let the rectangle be $ABCD$ labelled clockwise.
>
> - Place A : 12 ways
> - Place C diametricaly oppostite A : 1 way
> - Place B between A and C in the clockwise direction: 5 ways
> - Place D diametricaly oppostite B : 1 way
>
> So, by multiplication principle, we get $12 \times 1 \times 5 \times 1 = 60$ ways.
>
> However, since the rectangle is unlabelled, so the same rectangle is counted 4 times.

Fig 42

> Hence the answer is $60/4 = 15$.

■

এই অংকটায় একটা ত্রুটি ছিল, যেটা আমরা কথার প্যাঁচে ধামাচাপা দিয়ে দিয়েছি। অংকটায় polygon-এর vertex-গুলোতে কোনো লেবেল করা ছিল না, আমরাই সুবিধার জন্য $1, 2, ..., 12$সংখ্যা লাগিয়ে নিয়েছিলাম। একইভাবে rectangle-টাও $ABCD$ বলা ছিল না, সেটাও আমরাই করেছিলাম চিন্তা করার সুবিধার জন্য। অংকটার শেষভাগে গিয়ে আমরা ব্যস্ত হয়ে মনে করিয়ে দিয়েছিলাম যে A, B, C, D ইত্যাদি অংকটায় দেওয়া ছিল না, তাই একই rectangle চার্ভাবে গোণা হয়ে যাচ্ছে, তাই 4 দিয়ে ভাগ করেছিলাম। কিন্তু polygon-টাকে যে 1,2,...,12 করে লেবেল করেছিলাম, সেটাওতো অংকে দেওয়া ছিল না, তার জন্য কই কিছু করলাম না তো! আসলে যিনি অংকটা দিয়েছিলেন তিনি মনে মনে ধরে নিয়েছিলেন যে vertex-গুলো আলাদা আলাদা করে লেবেল করা আছে। সেটা অবশ্যই তাঁর প্রশ্নে বলে দেওয়া উচিত ছিল, কিন্তু বলতে ভুলে গেছেন। আমি তাহলে কি করে বুঝে গেলাম? আসলে আমি অংকটা দুভাবেই করে দেখেছি। তাই জানি যে লেবেল না করা থাকলে যে উত্তরটা আসে সেটা এখানে option-গুলোর মধ্যে দেওয়া নেই। বলাই বাহুল্য যে এটা MCQ না হলে আমিও অথৈ জলে পড়তাম। যাই হোক লেবেল করা না থাকলে অংকটা কি করে করা যেত দেখি। তার জন্য একটা গল্প বানিয়েছি নীচের অংকটায়।

Example 27: ধরো আমরা একধরণের গয়না বানানোর চেষ্টা করছি যেখানে একটা সোনার ফ্রেম থাকবে 12-side regular polygon আকারের, আর তার মধ্যে একটা হীরের rectangle বসানো থাকবে, তবে সেরকম গয়না ঠিক কতগুলো সম্ভব?

SOLUTION: আগের অংকের সঙ্গে এর পার্থক্যটা বোঝার জন্য Fig 42-র গয়নাদুটোর দিকে তাকাও। যদি সোনার ফ্রেমটার গায় সংখ্যা দিয়ে লেবেল করা থাকত, তবে জিনিস দুটোকে আলাদা বলতাম, কিন্তু গয়নায় যেহেতু কোনো লেবেল থাকে না তাই গয়না হিসেবে ওরা একই (খালি একটু ঘুরিয়ে রাখা হয়েছে এই যা)।
এখানেও চার ধাপে এগোব, তবে গুণতিটা হবে অন্যরকম--

> - Place one corner of the rectangle: 1 way (since all vertices are identical)
> - Place the oppostite corner: 1 way
> - Place one corner between the above corners: 3 ways
> - Place the final corner: 1 way
>
> So the answer is 3.

■

এবার তোমার করার জন্য একটা অংক।

Exercise 39: আগের অংকটার মতই। খালি এবার polygon-টার 20-টা বাহু নেব। এখন কতগুলো rectangle ঢোকানো যাবে? একবার vertex-গুলোতে লেবেল আছে ধরে করো, তারপর লেবেল ছাড়া কর। ■

আগেই বলেছি যে কোনো অংকের গোড়াতেই যে জিনিসগুলো গুণছ তাদের কয়েকটার ছবি এঁকে নেওয়া ভাল। দুঃখের ব্যাপার যে অনেক ছাত্রছাত্রীই তা না করে খালি কিছু ফর্মুলা অন্ধের মত লাগাতে যায়। তুমি যদি উপরের অংক দুটো না বুঝে প্যাটার্নে ফেলে এরকম অংক করার চেষ্টায় থাকো, তবে নীচের অংকটায় হোঁচট খাবার সমূহ সম্ভাবনা।

Exercise 40: আবার একই অংক, কিন্তু এবার বাহুর সংখ্যা 9. কতগুলো rectangle ঢোকাতে পারবে? লেবেল থাকলে, এবং না থাকলে কি হবে বল। ■

Example 28: Let $S = \{1, 2, ..., n\}$. Find the number of unordered pairs $\{A, B\}$ of subsets of S such that A and B are disjoint, where A or B or both may be empty. **(BST-BMT2013)**

SOLUTION: এই অংকটা কঠিন নয়, কিন্তু সমাধানটা এত সংক্ষিপ্ত, যে ম্যাজিক বলে মনে হতে পারে।

> First we count the number of ordered pairs (A, B).

কি করব বুঝে নিই। S-এর থেকে দুটো disjoint subsetবার করব A আর B. তার মানে A, B যেন দুটো ঝুড়ি, আমরা S-এর একেকটা element নিচ্ছি, এবং হয় সেটা A-তে রাখছি, নয়তো B-তে, আর নয়তো S-এই ফেরত পাঠিয়ে দিচ্ছি। অতএব--

> Each of thelements of S can be put eithr in A or in B or neither: 3ways.
>
> There are n elements. So, by multiplication principle, the number of ordered pairs (A, B) is 3^n.

এবার unordered pair বার করতে হবে। (A, B)আর (B, A) যেহেতু unordered pair হিসেবে একই, তাই 2দিয়ে ভাগ করলেই হত। খালি এর জন্য $A \neq B$ হতে হবে। A, B যেহেতু *disjoint*, তাই $A \neq B$ হবে। একটাই ব্যতিক্রম, সেটা হল $A = B = \phi$. সেটা বাদে বাকিদের সংখ্যাকে 2 দিয়ে ভাগ করে, এই কেসটা আলাদা করে যোগ করে দিলেই হবে। লক্ষ কর এই অংকে multiplication, subtraction, division এবং addition principle সব কটাই লাগল।

> Since $A \cap B = \phi$, so $A \neq B$ except when $A = B = \phi$. The ordered pairs (A, B)ar (B, A) give same unordered $\{A, B\}$. So the answer is $\frac{3^n - 1}{2} + 1$.

■

নীচের অংকটার মত অংক আমরা আগেই করেছি। খালি এখানে unordered pair নিয়ে কাজ করতে বলেছে। এক্ষুণি যেভাবে ordered থেকে unordered pair-এ গেলাম সেটা এখানেও কাজে দেবে।

Exercise 41: If r, s, t are distinct prime numbers and p, q are positive integers such that LCM of p, q is $r^3 s^4 t^5$, then find the number of *unordered* pairs $\{p, q\}$. এখানে unordered বলেছে, $p = 3, q = 4$-ও যা $p = 4, q = 3$-ও তাই। ■

Answers

1. $83 - 50 + 1 = 34$. **2.** $a = 100^2,\ b = 316^2,\ c = 100,\ d = 316,\ e = 316 - 100 + 1 = 217$. **3.** $54 - 10 = 44$. **4.** $a = 10000,\ b = 99999,\ c = 7 \times 1429,\ d = 7 \times 14285,\ e = 1429,\ f = 14285,\ g = 14285 - 1429 + 1 = 12857$. **5.** $250 - 25 + 1 = 226$. **6.** একটা square number যদি 3 দিয়ে ভাগ যায়, ত্বে তার square root-টাও 3 দিয়ে ভাগ যেতে বাধ্য। সুতরাং আমরা $(3n)^2 = 9n^2$ জাতীয় সংখ্যা গুণছি। 1 থেকে 99999-এর মধ্যে সবচেয়ে ছোটো এরকম সংখ্যা হল $9 = 9 \times 1^2$. আর সবচেয়ে বড় সংখ্যা পাব $n = 105$ বসালে।

সুতরাং উত্তর হল $105 - 1 + 1 = 105$. **7.** $a = 2,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 1,\ e = 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$.
8. বাঁপ্রান্তের লাল 3-ভাবে, ডানপ্রান্তের লাল 2-ভাবে, মাঝের পাঁচটা জায়গার প্রথমটা 5-ভাবে, দ্বিতীয়টা 4-ভাবে, তৃতীয়টা 3-ভাবে, চতুর্থটা 2ভাবে, এবং পঞ্চমটা 1-ভাবে। সুতরাং উত্তর $3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. **9.** দ্বিতীয়টার ক্ষেত্রে multiplication principle লাগানো যাবে, প্রথমটার ক্ষেত্রে যাবে না। কারাণ প্রথম ক্ষেত্রের দ্বিতীয় ধাপটা কতভাবে করা যাবে সেটা নির্ভর করবে প্রথম ধাপটা কি ভাবে করেছ তার উপরে। দ্বিতীয় পদ্ধতিতে উত্তর হবে $1 \times 1 \times 3 = 3$.
10. $5^3 = 125$. **11.** $4 \times 6 \times 5 \times 4 \times 1 = 480$. **12.** ডবল পিরিয়ডের ক্লাসটা কোথায় রাখবে ঠিক কর : 3-ভাবে করা যায়। সেটা কিসের ক্লাস হবে সেটা 4-ভাবে ঠিক করা যায়। অবশিষ্ট পিরিয়ডগুলোর মধ্যে প্রথমটা 3 ভাবে, দ্বিতীয়টা 2-ভাবে আর তৃতীয়টা 1 ভাবে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং উত্তর $3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$. **13.** $a = b = 3$, $c = 3 \times 3 = 9$. **14.** $3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$. **15.** $3 \times 5 = 15$. **16.** $(n-2)(n-3)$. **17.** 2^{10}-ভাবে।
18. যতক্ষণ পর্যন্ত প্রতি পদক্ষেপে বাঁ ডান যেকোনো দিকে যাওয়া চলবে, ততক্ষণ দিক নির্বাচন করা যাবে 2-ভাবে, ফলে $N(k) = 2^k$ হবে। কিন্তু যেই কোনো একটা দেওয়ালে ধাক্কা খাবে তারপর আর দুদিকে যাওয়া চলবে না, একদিকেই ফিরতে হবে। অমনি $N(k) < 2^k$ হবে। তার মানে প্রশ্নটা হল পাগলটার পক্ষে সবচেয়ে কম পদক্ষেপে কি করে একটা দেওয়ালে পৌঁছনো সম্ভব। এবার উত্তরটা বোঝাই যাচ্ছে, $k = 5$ পদক্ষেপে। **19.** $3 \times 4 \times 2 = 24$. **20.** $8 \times 2 \times 3 = 48$.
21. $13 \times 11 \times 5 = 715$. **22.** Prime factorisation-টা হল $2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$. আমরা সেই সব factor খুঁজছি যেগুলো odd, 3 দিয়ে ভাগ যায় কিন্তু 3^2 দিয়ে যায় না। এইরকম factor দেখতে হবে $3 \times 5^i \times 7^j$-র মত যেখানে $i = 0, 1, 2, 3$ আর $j = 0, 1, 2$. সুতরাং উত্তর $4 \times 3 = 12$. **23.** $7 \times 9 \times 11 = 693$. **24.** $5 \times 7 \times 7 = 245$.
25. $15 \times 2 \times 2 = 60$, কারণ m-এর চিহ্ন 2-ভাবে নেওয়া যায়, n-এর চিহ্নও তাই। **26.** $7 \times 3 = 21$.
27. Overcounting, যে সবক্ষেত্রে দুটো ছক্কাতেই জোড় আসবে সেসব ক্ষেত্রগুলোকে দুবার করে গোণা হয়ে গেছে।
28. "$i = j = 9$" কেসটা দুবার গোণা হয়েছে। **29.** রাজ্য ও রং দুটোই নির্বাচন করা হয়েছে, তাই overcounting. পাত্র আর পাত্রী দুইই নির্বাচন করার মত। একদম শেষধাপে তিন প্রতিবেশীই যে তিনটে আলাদা রং ব্যবহার করেছে এমন নাও হতে পারে, তাই undercounting. **30.** $BA = \begin{bmatrix} 15 & 17 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$, যেটা হল ভারত থেকে আমেরিকা যাওয়ার টেবিল। AB হল কতভাবে আমেরিকা থেকে ভারতে আসা যায় তার টেবিল। **31.** 2.
32. $a = 11, b = 11^{10}, c = 10, d = 10^{10}, e = 11^{10} - 10^{10}$. **33.** $11^5 - 6^5$. **34.** প্রথম লাফে ও 1 বাদে অন্য কোথাও যাবে। তারপর থেকে 9-টা লাফে অন্ততঃ একবার 1-এ আসতে হবে। $11^9 - 10^9$. **35.** $3^{10} - 9^{10}$.
36. $365^{100} - 365 \times 364 \times \cdots \times (365 - 99)$. পরে আমরা শিখব এরকম লম্বা গুণফলকে কি করে সংক্ষেপে লেখা যায়। **37.** অসম্ভব, যদি এরকম সম্ভব হত, তবে মোট রাস্তার সংখ্যা হত $(4 + 3 + 6 + 2)/2$, মানে সাড়ে সাত!
38. $\frac{5 \times 4}{2} = 10$. **39.** লেবেল থাকলে $\frac{20 \times 9}{2} = 90$. লেবেল ছাড়া 9. **40.** লেবেল থাক আর নাই থাক উত্তর দুইক্ষেত্রেই 0. যেহেতু 9 একটা odd সংখ্যা, তাই মুখোমুখি দুটো vertex পাওয়াই যাবে না! **41.** Ordered হলে উত্তর হত $7 \times 9 \times 11 = 703$. Unordered হওয়ায় এর মধ্যে প্রতিটা কেসই দুবার করে গোণা হয়েছে, খালি একটা কেস বাদে যেখানে $p = q$. তাই উত্তর হল $\frac{703 - 1}{2} + 1 = 352$.

Chapter II
কিছু পরিচিত প্যাটার্ণ

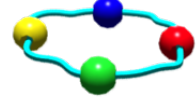
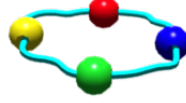
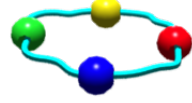
DAY 5
Distinct, ordered, no repetition (part 1)

আগেই বলেছি যে এই বইয়ের বিষয় হল বিভিন্ন জিনিসের সংখ্যা গোনা। যে কোনো জিনিসের সংখ্যা গোণাই এর মধ্যে পড়ে। তবে এই জাতীয় যে কোনো বইয়েরই অনেকটা জায়গা ধরে থাকে একটা বিশেষ ধরণের অংক, যেখানে আমাদেরকে কিছু জিনিস দেওয়া থাকে এবং তাদেরকে বিভিন্ন শর্ত মেনে সাজাতে বলা হয়। কতভাবে সাজানো যায় সেটা বার করাই হয় অংকগুলোর উদ্দেশ্য। যেমন--

1. একটা ক্লাসে 10-টা ছাত্র আছে, তাদেরকে কতভাবে একটা বেঞ্চে বসানো যায়?
2. কতভাবে বসানো যায় যাতে দুটো বিশেষ ছাত্র পাশাপাশি না থাকে?
3. কেবলমাত্র $1, 2, 3, 4, 5$, এই পাঁচটা digit ব্যবহার করে মোট কতগুলো তিন digit-এর সংখ্যা বানানো যায়? এদের মধ্যে কতগুলো 3 দিয়ে ভাগ যাবে?
4. ছয়টা বিভিন্ন রঙের পুঁতি দিয়ে কতভাবে মালা গাঁথা যায়, ইত্যাদি।

অংকগুলোর সমস্যা হল অনেক সময়ে দুটো সম্পূর্ণ আলাদা দেখতে অংকের জন্য একই কায়দা কাজে লাগতে পারে, আবার প্রায় একইরকম দেখতে দুটো অংকের ক্ষেত্রে সম্পূর্ণ আলাদা কায়দার দরকার হতে পারে। সেই কারণে ধাঁধা লেগে যাওয়া বিচিত্র নয়। এই ধাঁধার হাত থেকে বাঁচার জন্য জানা দরকার যে এই ধরণের একটা অংকে কোন কোন জিনিসের উপর সমাধানের কায়দাটা নির্ভর করে। একটা অংক হাতে পেলেই এর জন্য তিনটে ব্যাপার লক্ষণীয়--

- প্রথম লক্ষণীয় হল--যে জিনিসগুলো সাজাতে বলছে সেগুলো কি distinct (মানে আলাদা আলাদা) নাকি identical(মানে একই)।
  - অনেক অংকের ক্ষেত্রে সবার distinct হয়, যেমন পাঁচটা ছেলেকে একটা বেঞ্চে বসানোর অংকে ছেলেগুলো অবশ্যই distinct.
  - অনেক অংকে সবাই identical হয়, যেমন ভিখারিদের পয়সা দেওয়ার অংকে কয়েনগুলো সবই identical ধরতে হবে, কে কতগুলো কয়েন পেল সেটাই খালি গুরুত্বপূর্ণ, কে কোন কয়েনটা পেল সেটা নিয়ে ভিখারিরা সাধারণতঃ মাথা ঘামায় না (জালি কয়েনের সম্ভাবনা না থাকলে!)
  - কোথাও আবার কিছু distinct আর কিছু identical মিশে থাকে, যেমন KOLKATA-র অক্ষরগুলো সাজিয়ে নতুন শব্দ তৈরীর অংকে K-দুটো identical, আবার A-দুটোও নিজেদের মধ্যে identical, যদিও K আর A পরস্পরের থেকে distinct.
- দ্বিতীয় লক্ষণীয় হল--সাজানোটা কি ordered নাকি unordered? অর্থাৎ কে কার পরে আসছে সেটা কি গুরুত্বপূর্ণ?

Fig 1 **Fig 2** **Fig 3**

- অনেক অংকে order-টা গুরুত্বপূর্ণ হয়, যেমন $1, 2, 3$ দিয়ে বিভিন্ন চার digit-এর সংখ্যা বানানোর অংকে 1312 আর 1321-কে অবশ্যই আলাদা করে গুণতে হবে।
- অনেক অংকে order-টা আদপেই গুরুত্বপূর্ণ নয়, যেমন পাঁচজন ছাত্রের থেকে তিন জনকে নিয়ে একটা দল বানাতে হলে order-এ কিছুই আসে যায় না, দল হিসেবে সৌরভ, বিকাশ, অজিত-ও যা, আবার অজিত, সৌরভ, বিকাশও তাই।
- কোনো কোনো অংকে কিছু কিছু order গুরুত্বপূর্ণ, বাকিরা গুরুত্বপূর্ণ নয়। যেমন ধরো Fig 1, Fig 2 আর Fig 3-এ চারটে পুঁতি দিয়ে মালা গাঁথা হচ্ছে। পুঁতিগুলো কার পরে কোনটা সূঁচে পরানো হয়েছে তার ভিত্তিতে দেখলে তিনটে কায়দা আলাদা। কিন্তু মালাটা শেষ হবার পর দ্যাখো Fig 1 আর Fig 2 আসলে একই মালা, কিন্তু Fig 3-র মালাটা অন্য।

- তৃতীয় লক্ষণীয় হল--repetition কি চলতে পারে, মানে একই জিনিসকে কি একাধিকবার ব্যবহার করা যায়? একটা ক্রিকেট টীমে যে একই খেলোয়াড়কে দুবার নেওয়া যায় না, সেটা নিশ্চয়ই বলে দিতে হবে না! কিন্তু যদি বলি $1, 2, 3$ দিয়ে কত রকম পাঁচ digit-এর সংখ্যা বানানো যায়, তবে 11312 নিতে কোনো আপত্তি নেই।

বুঝতেই পারছ যে এই তিনটে ব্যাপার মিলিয়ে মিশিয়ে অনেক রকমের অংক বানানো যায়। আমরা সেগুলো একে একে শিখব। প্রথম দুদিনে শিখব সেইসব অংক যেখানে জিনিসগুলো সবাই distinct, কে আগে কে পরে সেই order-টা গুরুত্বপূর্ণ, কিন্তু কোনো repetition চলবে না। এই সব অংকে প্রধান হাতিয়ার হল multiplication principle. তবে অনেক সময়ে multiplication principle-টা গুছিয়ে লিখতে গিয়ে অনেকগুলো ধাপ হয়ে যায়, তখন সেটাকে সংক্ষেপে লেখার জন্য দুটো notation ব্যবহার করা হয়। প্রথমে সে দুটো শিখে নিই।

5.1 প্রথম notation: factorial

একদম সহজ অংক দিয়ে শুরু করি।

Example 1: একটা ক্লাসে 50-টা ছাত্র আছে। তাদেরকে একটা লাইনে কতভাবে দাঁড় করানো যাবে?

SOLUTION: এখানে "জিনিস"-গুলো হল 50-টা ছাত্র। কোনো দুটো ছাত্র কখনো identical হয় না, তাই এখানে "জিনিস"-গুলো distinct. লাইনে দাঁড় করানো মানে কে কার পরে দাঁড়াচ্ছে সেটা গুরুত্বপূর্ণ, সুতরাং সাজানোটা ordered. আর আমাদের ছাত্ররা কেউই ভৌতিক ক্ষমতাসম্পন্ন নয়, তাই একই ছাত্র একাধিক জায়গায় দাঁড়াতে পারে না, সুতরাং repetition-এর কোনো প্রশ্ন নেই। Multipication principle লাগাই--

1. একেবারে বাঁদিকে দাঁড়নোর জন্য একটা ছাত্রকে নাও। : 50 ভাবে করা যাবে,
2. তার ডানদিকে দাঁড়ানোর জন্য আরেকটা ছাত্র চাই, তাকে $50 - 1 = 49$ ভাবে নির্বাচন করা যাবে,
3. তার পরের স্থানের জন্য ছাত্র পাওয়া যাবে $50 - 2 = 48$ ভাবে।
4. তারও পরের স্থানের জন্য... ওরে বাবা, এরকমভাবে লিখতে লিখতে তো হাত ব্যথা হয়ে যাবে!

লিখতে যতই হাত ব্যথা হোক, ধাপগুলো কিন্তু বোঝাই যাচ্ছে--মোট 50-টা ধাপ হবে, প্রতি ধাপে সংখ্যাটা এক এক করে কমতে থাকবে, একদম শেষ ধাপে খালি একটাই ছাত্র পড়ে থাকবে, তাই খালি একভাবেই নেওয়া যাবে। সুতরাং ধাপগুলো বিস্তারিতভাবে না লিখেই multipication principle লাগিয়ে উত্তর পেয়ে যাচ্ছি--

$$50 \times 49 \times 48 \times \cdots \times 2 \times 1.$$

■

নিশ্চয়ই সন্দেহ নেই যে এখানে 50-এর বদলে অন্য কোনো সংখ্যা থাকলেও একই যুক্তি খাটত, প্রতিধাপে সংখ্যাটা এক এক করে কমতে কমতে 1 অব্ধি নামত। সুতরাং যদি n-টা ছাত্র থাকত তবে উত্তর হত

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

এই জিনিসটা এত বার বার কাজে লাগবে যে আমরা এর একটা সহজ নাম দেওয়া হয়েছে--factorial of n, যাকে সংক্ষেপে লেখে $n!$. সংজ্ঞাটা এইরকম--

DEFINITION: Factorial

For any positive integer n we define the **factorial** of n as

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Also we define $0! = 1$.

দুটো কথা বলে নিই--

- $n!$ মানে n থেকে শুরু করে এক এক করে কমতে কমতে 1 অব্ধি নামতে হয়, এভাবেও ভাবতেও পারো, আবার $1 \times 2 \times 3 \times \cdots$ করতে করতে n অব্ধি উঠতে হয়, এভাবেও ভাবা যায়।

- দ্বিতীয় কথাটা হল $0! = 1$ নেওয়াটা একটা convention, অর্থাৎ প্রথা। এর ফলে কিছু জিনিস সহজে লেখা যায় বলেই এইরকম নেওয়া হয়েছে। সেটা আমরা একটু পরেই দেখব।

ছোটো কয়েকটা n-এর জন্য $n!$ বার করা যাক।

Example 2:

$$\begin{aligned}
1! &= 1, \\
2! &= 1 \times 2 = 2, \\
3! &= 1 \times 2 \times 3 = 6, \\
4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24, \\
5! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.
\end{aligned}$$

■

আচ্ছা এবার যদি তোমায় $6!$ বার করতে বলি কি করে করবে? তুমি কি $1 \times 2 \times \cdots$ করে 6 অব্ধি গুণ করতে বসবে? সেটা করলেও উত্তর আসবে বটে, কিন্তু লক্ষ কর যে $5! = 120$-র মধ্যে $1, 2, ..., 5$ পর্যন্ত গুণটা করাই আছে, সুতরাং এটাকে 6 দিয়ে গুণ করে দিলেই চট্ করে $6! = 5! \times 6 = 120 \times 6 = 720$ পেয়ে যাবে। এই কায়দাটা খুব কাজের। যেকোনো $n!$-এর পেটের মধ্যেই তার আগের সব factorial-রা ঢুকে আছে। কথাটা গুছিয়ে লিখে রাখি।

THEOREM

For any $n = 1, 2, 3, ...$

$$n! = n \times (n-1)!$$

এই ব্যাপারটা না হলে factorial-দের নিয়ে কাজ করা বেজায় কঠিন হত। কারণ $n!$ হল 1 থেকে n অব্ধি সব সংখ্যার গুণফল, সুতরাং n যত বাড়বে ততই এটা সাংঘাতিকরকমের লাফিয়ে লাফিয়ে বাড়বে। কিরকম লাফিয়ে বাড়ে তার একটা নমুনা দেখবে? $6! = 720$ ছিল, আর $24!$ হল

$$24! = 620448401733239439360000.$$

আর

$$30! = 265252859812191058636308480000000.$$

এক্ষুণি যে 50-টা ছাত্রকে এক লাইনে দাঁড় করাচ্ছিলাম তার কায়দা ছিল $50!$ রকম। সেই সংখ্যাটা আসলে কত শুনবে? সেটা হল--

$$50! = 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.$$

মানে যদি প্রত্যেকভাবে দাঁড় করাতে মাত্র এক সেকেণ্ড করেও লাগে তবে সবরকমভাবে দাঁড় করাতে লেগে যাবে 977819354478953769406269552664119368710700924928000000000 বছর, যেখানে পৃথিবীরই বয়স বলা হয় মোটে 4840000000 বছর!!! সাধে কি আর স্কুলে বাচ্চাদের এক লাইনে দাঁড় করাতে মাস্টারমাশাইদের এত বেগ পেতে হয়! যাই হোক, বুঝতেই পারছ যে, factorial নামক notation-টা বড়ই কাজের জিনিস, নইলে আমাদের এত বড় বড় সংখ্যা লিখতে লিখতে হাত ব্যথা হয়ে যেত। তার চেয়ে আমরা কেমন দিব্যি ছোট্টো করে $50!$ লিখেই একই জিনিস বুঝিয়ে দিতে পারলাম। এই যে বড় বড় সংখ্যাগুলো দিলাম, এগুলো কম্পিউটারে খানিকটা জটিল একটা প্রোগ্রাম দিয়ে বার করতে হয়েছে। তোমার ক্যালকুলেটরেও দেখবে factorial বার করার ব্যবস্থা আছে, কিন্তু $15!$ অব্ধি যাওয়ার পরই উত্তরটা আর ক্যালকুলেটরের ছোট্টো পর্দায় ধরে না, তখন ক্যালকুলেটরটা একটা approximate উত্তর (মানে কাছাকাছি কিছু একটা উত্তর) দিয়ে ছেড়ে দেয়। পরীক্ষা করেই দ্যাখো।

আমরা এক্ষুণি শিখলাম যে $n! = n \times (n-1)!$. এর ফলে কাজ কত সহজ হয়ে যাবে দ্যাখো। মনে করো তোমাকে এই জিনিসটাকে সরল করতে দিলাম--

$$\frac{7+3}{1+4}.$$

তবে তুমি নিশ্চয়ই Fig 4-এর মত এগোবে। লক্ষ কর এখানে তুমি উপরতলার $7+3$-কে 10 আর নীচের তলার $1+4$-কে 5 লিখে তারপর কাটাকাটি করে উত্তর পেয়েছ 2. কিন্তু যদি

$$\frac{50!}{48!}$$

Fig 4

$$\frac{7+3}{1+4} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\cancel{5}} = 2$$

দিতাম, তবে তুমি নিশ্চয়ই 50! আর 48! বার করতে বসবে না! সেক্ষেত্রে তুমি চট্ করে লক্ষ করবে যে 48! আসলে 50!-এর পেটের মধ্যেও একটা আছে, কারণ $50! = 48! \times 49 \times 50$. অতএব

$$\frac{50!}{48!} = \frac{48! \times 49 \times 50}{48!} = 49 \times 50 = 2450.$$

এই কায়দাটা খুব ভালো করে শিখে রাখো--সুযোগ পেলেই factorial-দের মধ্যে কাটাকাটি করে দেওয়া।

Exercise 1: Simplify:
$(i)\ \frac{30!}{29!}$, $(ii)\ \frac{35!(13^2)!}{170!33!}$
■

Exercise 2: কোনটা বেশী বড়, $\frac{30!}{100!}$ নাকি $\frac{31!}{101!}$? ■

মনে রেখো যে factorial হল লেখার একটা notation মাত্র, অংক করার হাতিয়ার নয়। হাতিয়ার হল multiplication principle ইত্যাদি, কিছু বিশেষ ক্ষেত্রে factorial ব্যবহার করে উত্তরটাকে সংক্ষেপে গুছিয়ে লেখা যায়, এই যা।
একটা উদাহরণ দেখলে ব্যাপারটা স্পষ্ট হবে।

Example 3: In how many ways can you select 30 men to occupy 30 chairs in a row so that a certain man is never in an extreme chair?

SOLUTION: ধাপে ধাপে এগোব, এখানে ভদ্রলোকরা সবাই distinct, তাঁদের নাম জানি না, তাই $1, 2,$ ইত্যাদি করে নাম দিয়ে নিলে সুবিধা হবে। ধরো এমনভাবে নাম দিলাম যাতে সেই বিশেষ ভদ্রলোক 1 নম্বর হন। প্রথমে সেই বিশেষ ভদ্রলোককেই বসাব। তাঁর আবার প্রান্তের চেয়ারদুটো পছন্দ নয়। সুতরাং তাঁকে বসানো যাবে $30 - 2 = 28$ ভাবে। এবার 2 নম্বরকে বসাব। অবশিষ্ট $30 - 1 = 29$ খানা চেয়ারের যে কোনোটাতেই তাঁকে বসানো যাবে। তৃতীয় ভদ্রলোকের জন্য থাকবে $29 - 1 = 28$-খানা, এইভাবে চলতেই থাকবে। প্যাটার্ণটা যেই বুঝে গেলাম, এবার একবারে factorial ব্যবহার করে লিখে দেব--

> - The special man can be seated in $30 - 2 = 28$ ways.
> - The remaining 29 men can be seated in the reamining 29 chairs in $29!$ ways.
>
> So, by multiplication principle, the answer is $28 \times 29!$.

বিকল্প পদ্ধতি

এখানে আমরা অংকটা করলাম লোকেদের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে, মানে প্রথম ধাপে প্রথম জন, দ্বিতীয় ধাপে দ্বিতীয়জন এইভাবে এগোচ্ছিলাম। চাইলে আমরা চেয়ারের দৃষ্টিভঙ্গী থেকেও করতে পারতাম। এর জন্য চেয়ারগুলোকে ধাপে ধাপে ভরতাম--

> - We can fill the leftmost chair in 29 ways (anybody except the special man)
> - We can fill the rightmost chair in $29 - 1$ ways (anybody except the special man)
> - We can fill the remaining 28 chais in $28!$ ways.
>
> So, by multiplication principle, the answer is $29 \times 28 \times 28! = 28 \times 29!$ ways.

উত্তর অবশ্যই আগের মতই এল। ■

এবার একটা চিন্তা করার প্রশ্ন দিই।

Exercise 3: একজন ছাত্র উপরের অংকটা এইভাবে করবে বলে ভেবেছে--

> *প্রথমে বাঁদিকের চেয়ারে লোক বসাব, 29 ভাবে করা যায়। তার পরের চেয়ারের জন্যও লোক পাওয়া যাবে 29 জন। তার পরের চেয়ারের জন্য 28 জন, ইত্যাদি। সুতরাং উত্তর হল $29 \times 29!$.*

ভুলটা কোথায়? ■

এবার তোমার হাতপাকানোর পালা।

Exercise 4: একটা ক্লাসে 30 জন ছেলে আর 20 জন মেয়ে আছে। এদেরকে কতভাবে এক লাইনে দাঁড় করানো যাবে যাতে মেয়েরা সবাই এক সঙ্গে থাকে, আর ছেলেরাও সবাই এক সঙ্গে থাকে? ■

Exercise 5: $1, 2, 3$ আর 4 এই প্রত্যেকটা digit একবার মাত্র ব্যবহার করে কতগুলো সংখ্যা বানানো যায়? ■

Exercise 6: 10 points (labelled $1, ..., 10$) are placed uniformly around a circle. An ant can go from any point to any other point along a straight line. The ant starts at point 1. In how many ways can it return to 1 for the first time by visiting all other points exactly once in between? ■

এবারের অংকটা একটু কঠিন, এবং এই বইতে আর কোথাও লাগবেও না। তাই অস্বস্তি হলে বাদ দিয়ে যেতে পারো।

Example 4: The sum of

$$(1^2 - 1 + 1)1! + (2^2 - 2 + 1)2! + \cdots + (n^2 - n + 1)n!$$

is (A) $(n+2)!$ (B) $(n-1)((n+1)!)+1$ (C) $(n+2)!-1$ (D) $n((n+1)!)-1$. **(KVPY.SB/SX.2011)**
SOLUTION: প্রথমেই বলে রাখি এই অংকটা "ফাঁকি" দিয়ে করা যায়। তার জন্য প্রথমে ছোটো কোনো n নাও, ধরো $n = 1$. তাহলে যোগফলটায় খালি একটাই term থাকবে, এবং সেটা হবে $(1^2 - 1 + 1) \times 1! = 1$. এবার (A),(B),(C) আর (D)-তে $n = 1$ বসিয়ে দ্যাখো। (A)-এর ক্ষেত্রে পাবে $(1 + 2)! \neq 1$, সুতরাং (A) বাদ। (B)-এর বেলায় 1, সুতরাং আশা আছে। (C)-এর বেলায় $\neq 1$, সুতরাং বাদ। কিন্তু (D)-এর বেলাতে 1, অতএব আশা আছে। এবার লড়াই (B) আর (D)-এর মধ্যে। তার জন্য n-এর অন্য কোনো value নাও, ধরো $n = 2$. তাহলেই দেখবে (D)-ও কাটা পড়বে, টিঁকে থাকবে খালি (B). সেটাই উত্তর।
অবশ্য এটা নিতান্তই ফাঁকি হল। অংকটা সত্যি সত্যি না করে, MCQ-এর গলদের ফুটো দিয়ে গলে যাওয়া। ঠিকঠাক করে করার একটা কায়দা হল সবকিছুকে factorial দিয়ে লিখতে পারা। যেমন ধরো $(n + 1) \times n!$-কে আমরা লিখতে পারি $(n + 1)!$. এটাকে ভাবা যায় যেন $(n + 1)$-টা factorial-এর "ভিতরে ঢুকে গেল"। তেমনি যদি $n \times n!$ দিত তবে সেটাকে $((n + 1) - 1) \times n! = (n + 1)! - n!$ হিসেবে লিখতে পারতাম। অর্থাৎ আমাদের উদ্দেশ্য হল factorial-এর সঙ্গে যাই n-ওয়ালা কিছু গুণ হয়ে থাকবে সেটাকে কোনোভাবে factorial-এর "ভিতরে ঢুকিয়ে নেওয়া"। যদি $n^2 \times n!$ থাকত তবে--

$$\begin{aligned} n^2 \times n! &= [(n+2)(n+1) - (3n+2)] \times n! = (n+2)! - (3n+2) \times n! \\ &= (n+2)! - [3(n+1) - 1] \times n! = (n+2)! - 3(n+1)! - n!. \end{aligned}$$

Then the k-th term is

$$\begin{aligned}
& ({k^2} - k + 1)k! \\
= \; & (\underbrace{(k+2)(k+1) - 3k - 2}_{\text{এটা আসলে } k^2} - k + 1)k! \\
= \; & ((k+2)(k+1) - 4k - 1)k! \\
= \; & ((k+2)(k+1) - 4\underbrace{((k+1) - 1)}_{k} - 1)k! \\
= \; & ((k+2)(k+1) - 4(k+1) + 3)k! \\
= \; & ((k+2)! - 4(k+1)! + 3k!
\end{aligned}$$

অনুমান করতে পারছ যে এর উপর summation লাগালে factorial-দের অনেকগুলো যোগফল আসবে। তাদের একটা নাম দিয়ে নিই, তাহলে লিখতে সুবিধা হবে--

Let $S_p = 1! + 2! + \cdots + p!$.

এখানে p দেখে ঘাবড়ে যেও না। Notation-টার জন্য কিছু একটা অক্ষর দরকার ছিল, তা আমরা p ব্যবহার করেছি, এই যা। এবার সব কিছু S_p-জাতীয় জিনিস দিয়ে লিখে ফেলব, এবং আশা করব যে শেষমেশ সেগুলো সব কাটাকাটি হয়ে যাবে।

$$\begin{aligned}
& \sum_1^n (k+2)! - 4\sum_1^n (k+1)! + 3\sum_1^n k! \\
= \; & \underbrace{S_n - 1 - 2 + (n+1)! + (n+2)!} - 4\underbrace{S_n - 1 + (n+1)!} + 3S_n \\
= \; & \cdots \\
= \; & (n-1)(n+1)! + 1.
\end{aligned}$$

■

5.2 দ্বিতীয় notation: permutation

এবার আমরা আরেকটা দরকারী notation শিখব। এখানেও মূল উদ্দেশ্য একই, multiplication principle-এর অনেকগুলো ধাপকে সংক্ষেপে লেখা।

Example 5: আবার আমরা সেই 50-টা ছাত্র নিয়েই কাজ করব, কিন্তু এবার লাইনটা ছোটো, খালি 30 জন ধরে। প্রশ্ন হল এই ছাত্রদের থেকে 30 জনকে নিয়ে কতভাবে তুমি এরকম লাইন বানাতে পারো।

SOLUTION: এখানেও multipication principle লাগানো যাবে--

1. একদম বাঁদিকের জনকে নির্বাচন করা যাবে 50-ভাবে,
2. তার পাশের জনকে $50 - 1 = 49$-ভাবে,
3. তার পাশের জনকে $50 - 2 = 48$-ভাবে।

4. ইত্যাদি, ইত্যাদি, খালি এবার 30 ধাপ অব্ধি করলেই চলবে।

সুতরাং ধাপগুলো বিস্তারিতভাবে না লিখেই ধাঁ করে উত্তরটা লিখে দিতে পারি--

$$50 \times 49 \times 48 \times \cdots \times (50 - 30 + 1).$$

লক্ষ কর যে 30 নম্বর ধাপে সংখ্যাটা হল $50 - 30 + 1$, সাবধান, $50 - 30$ নয় কিন্তু! ■

এখানে ছাত্র সংখ্যা ছিল 50, আর লাইনে ধরে 30 জন। তাই উত্তরটা হল 30-টা সংখ্যার গুণফল, তার মধ্যে সবচেয়ে বড়টা 50, বাকিগুলো সেখান থেকে এক এক করে কমিয়ে কমিয়ে পাওয়া। যদি ছাত্র সংখ্যা হত n আর লাইনে ধরত r জন (যেখানে $r \leq n$) তবে আমরা n থেকে শুরু করে এক এক করে কমিয়ে যেতাম। এইভাবে r-খানা সংখ্যা পেলে তাদের গুণফলটাই হত উত্তর,মানে--

$$\underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}_{\text{ঠিক } r\text{-খানা সংখ্যা আছে}}$$

এইটার একটা নাম আছে। একে বলে number of permutations of n distinct objects, taken r at a time. সংক্ষেপে লেখে ${}^nP_r$.

DEFINITION: Permutation

Let r, n be two nonnegative integers such that $r \leq n$. Then the number of **permutations** of n distinct objects taken r at a time is

$${}^nP_r \equiv (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

আচ্ছা, এই ফর্মুলাটা ব্যবহার না করে খালি সহজ বুদ্ধিতে বল তো ${}^nP_n$ কত হবে? মানে n-খানা distinct জিনিসকে এক লাইনে কতভাবে সাজানো যায়? এর উত্তর তো জানিই, $n!$. এবার ফর্মুলাটায় বসিয়ে দ্যাখো, $\frac{n!}{0!}$ পাবে। তাহলে বুঝতে পারলে, কেন আমরা $0! = 1$ নিয়েছিলাম?

Factorial এবং permutaion, এরা কিন্তু দুটো notation মাত্র, যা দিয়ে multiplication principle-এর অনেকগুলো ধাপ সংক্ষেপে লেখা যায়।

Exercise 7: একটা ক্লাসে 50-টা ছাত্র আছে। তাদের থেকে তিনজনকে কতভাবে নির্বাচন করা যায় প্রথম, দ্বিতীয় আর তৃতীয় পুরস্কারের জন্য? ■

এর পরের অংকটা combination lock বলে এক ধরণের তালা নিয়ে (Fig 5)। সুটকেসের গায় অনেক সময়ে এরকম তালা দেখা যায়।

Fig 5

Exercise 8: A combination lock opens only when the 3 rings are correctly aligned to form a secret number. Each ring has the digits $0, ..., 9$ on it. A thief has learned that the secret number has all the 3 digits distinct. So he plans to try out all such numbers one by one. If he takes 5 seconds to try out each number, then what is the maximum amount of time he will need to open the lock? ■

DAY 6
Distinct, ordered, no repetition (part 2)

6.1 Restricted permutation

আমরা আজকেও গতকালের মতই কিছু জিনিস কতভাবে সাজানো যায় বার করব। জিনিসগুলো হবে distinct, কে আগে কে পরে সেটা গুরুত্বপূর্ণ, এবং repetition চলবে না, মানে একটা জিনিস একাধিকবার আসতে পারে না। খালি আজকের নতূনত্ব হল এই যে, কিছু বাড়তি শর্ত দেওয়া থাকবে, সাজানোর সময়ে সেগুলো মেনে চলতে হবে। নানারকম শর্ত হতে পারে। আমরা কয়েক ধরণের শর্ত ধরে ধরে আলোচনা করব।

6.1.1 Side by side

এখানে আমাদের বাড়তি শর্ত হবে এই জাতীয়--কোনো বিশেষ কিছু জিনিসকে পাশাপাশি থাকতে হবে, বা হয়তো পাশাপাশি থাকলে চলবে না, ইত্যাদি।

Example 6: In how many ways can 3 men and 7 women stand in a row so that the women are together?

SOLUTION: এই ধরণের অংকের কায়দা হল যাদেরকে একসঙ্গে রাখতে হবে তাদেরকে একটা গুচ্ছ হিসেবে কল্পনা করা। যেমন এখানে সাতজন মহিলাকে একটা গুচ্ছ বলে ভাবি। এই গুচ্ছটা যেন একটা "জিনিস"।

> We consider the 7 women as a single object. Then we have $3 + 1 = 4$ objects.

প্রথমে এই চারটে "জিনিস"-কে সাজাব, তারপর গুচ্ছটার ভিতরে মহিলাদের সাজাব--

> - Arrange these 4 objects in a line: $4!$ ways,
> - Arrange the 7 women among themselves: $7!$ ways.
>
> So, by multiplication principle, the answer is $4! \times 7!$.

■

এবার নীচের অংকগুলো অনায়াসে হওয়া উচিত।

Exercise 9: In how many ways can 3 men and 7 women stand in a row so that all the men are together? ■

Exercise 10: In how many ways can 3 men and 7 women stand in a row so that persons of the same gender are together? ■

Fig 6

এবারের অংকটার ভাষা দেখে একটু ধাঁধা লাগতে পারে, কিন্তু অংকটা আসলে সোজাই।

Exercise 11: In how many ways can 3 men and 7 women stand in a row so that at least two persons of the same gender are separated by a person of the opposite gender? ■

এইবার আরেক ধরণের অংক দেখি, যেখানে পাশাপাশি না থাকাটাই কাম্য। এই অংকগুলোর একটা কৌশল আছে, যেটা একটা উদাহরণ দিয়ে শিখলে সুবিধা হবে।

Example 7: 3 জন মহিলা আর 5 জন পুরুষ আছে। এদেরকে কতভাবে এক লাইনে দাঁড় করানো যায় যাতে মহিলারা কেউ পাশাপাশি না থাকে?

SOLUTION: এখানে কৌশলটা এইরকম--যারা পাশাপাশি থাকলে আপত্তি আছে তাদের বাদে বাকিদের এক লাইনে দাঁড় করিয়ে দাও। মানে আমাদের উদাহরণে প্রথমে 5 জন পুরুষকে এক লাইনে দাঁড় করিয়ে দাও। এদের যেহেতু কোনো বায়নাক্কা নেই তাই এ কাজটা 5! ভাবে করা যাবে। এবার এদের ফাঁকে ফাঁকে মহিলাদের ঢুকিয়ে দাও। একেবারে দুই প্রান্তেও মহিলাদের রাখা যায়। Fig 6 দেখে নাও, মহিলারা কোথায় কোথায় দাঁড়াতে পারে সেটা গোল করে করে দেখিয়েছি। খালি একটাই কথা মনে রেখো--একই গোলে একাধিক মহিলাকে দাঁড় করানো চলবে না, কারণ তাহলে তারা আবার পাশাপাশি হয়ে যাবে। দুদিকের প্রান্ত আর মাঝের ফাঁকগুলো নিয়ে মহিলাদের ঢোকানোর জায়গা মোট $5+1=6$-টা। প্রথম মহিলার জন্য এদের মধ্যে একটা নির্বাচন কর (6-ভাবে), দ্বিতীয় মহিলার জন্য অবশিষ্ট 5-তা জায়গা থেকে একটা নাও (5-ভাবে), আর তৃতীয় মহিলার জন্য 4-ভাবে। মানে মহিলাদের গতি করা যাচ্ছে $6 \times 5 \times 4$-ভাবে। এটাকে অবশ্য সংক্ষেপে $^6P_3$ হিসেবে লেখা যায়। সুতরাং সব মিলিয়ে উত্তর হল $5! \times ^6 P_3$. ■

Exercise 12: 4 জন পুরুষ আর 10 জন মহিলা। কতভাবে এক লাইনে দাঁড় করাতে পারো যাতে পুরুষরা কেউ পাশাপাশি না থাকে? ■

Exercise 13: আগের অংকটাই আবার কর, কিন্তু এবার মহিলারা পাশাপাশি থাকলে চলবে না, পুরুষরা যেভাবে খুশি থাক আপত্তি নেই। ■

Example 8: m men and n women are to be seated in a row so that no two women sit together. If $m > n$, then show that the number of ways in which they can be seated is

$$\frac{m!(m+1)!}{(m-n+1)!}.$$

(IIT,1983)

SOLUTION: এটাকে ধাপে ধাপে ভাঙব এইভাবে--প্রথমে ছেলেদের বসাব। তারপর মেয়েদেরকে ফাঁকে ফাঁকে ঢুকিয়ে দেব। কোনো ফাঁকে দুজন মেয়েকে রাখব না, সুতরাং মেয়েরা কেউ পাশাপাশি থাকবে না।

1) Seat the m men in a row: $m!$ ways.
2) Place the n women in the $m+1$ gaps created by the men: ${}^{m+1}P_n$ ways.

Total number of ways is

$$m! \times \frac{(m+1)!}{(m+1-n)!},$$

as required.

■

Exercise 14: I have 3 geography books, 5 math books and 2 computer science books. In how many ways can I keep them on a shelf in each of the following cases? i) the two extreme books are not math books. ii) The geography books are never side by side? iii) books of the same subject are kept together. ■

6.1.2 জোড় বাঁধা

দুই ধরণের জিনিসের মধ্যে বিভিন্ন শর্ত মেনে কতভাবে জোড় বাঁধা যায় তা নিয়ে আমরা এই বইতে আগেও মাথা ঘামিয়েছি। নানা ধরণের সমস্যাকে এই আকারে এনে ফেলা যায়। যেমন ধরো বাক্সে বল রাখার অংককে মনে করা যায় যেন বাক্স আর বলের মধ্যে জোড় বাঁধা। কিছু লোককে এক লাইনে চেয়ারে বসানোকে মনে করা যায় লোক এবং চেয়ারের মধ্যে জোড় বাঁধা। আবার উল্টো দিক দিয়ে ভাবলে জোড় বাঁধাকে মনে করা যায় যেন কিছু লোককে এক লাইনে চেয়ারে বসানোর সমস্যা। নীচের অংকটা সে ভাবেই ভাবলেই সুবিধা হবে।

Exercise 15: In how many ways can 5 marriages take place among 7 men and 8 women?
HINT:
এখানে ছেলেদের সংখ্যা কম, মেয়েদের বেশী। ছেলেদের মনে করো যেন একেকটা চেয়ার, তার সঙ্গে কোনোও মেয়ের বিয়ে মানে যেন মেয়েটা সেই চেয়ারে বসল। এবার উত্তরটা বোঝা যাচ্ছে?
■

Exercise 16: How many different one-one functions are there from a set A to a set B if A is of size 3 and B of size 4?
HINT:
কাকে one-one function বলে মনে আছে তো? না থাকলে Fig 7 দেখে নাও। এখানে A-র মধ্যে তিনটে element, তাদের প্রত্যেকটা থেকে ঠিক একটা করেই তীর বেরিয়েছে B-এর বিভিন্ন element পর্যন্ত। এইটুকু পর্যন্ত হলে বলতাম function. কিন্তু এখানে আরও লক্ষ কর কোনো দুটো তীর একই জায়গায় শেষ হয়নি, তাই one-one. প্রশ্ন হল কতভাবে এরকম তীর আঁকা যায়? এটাও আসলে আমাদের পূর্বপরিচিত অংকই। A-র element-গুলোকে যদি একেকটা লোক ভাবো, আর B-র element-গুলোকে ভাবো একটা লাইন বরাবর চারটে চেয়ার, তবে উত্তরটা চোখের নিমেষে বেরিয়ে যাবে।

Fig 7

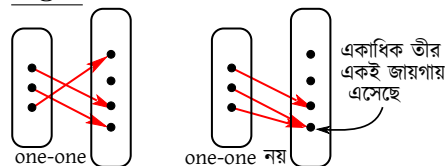
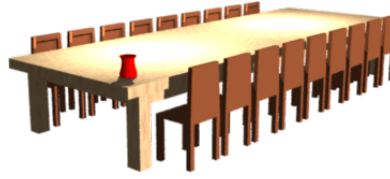



Fig 8

■

এইবার একটা অন্যরকমের অংক, স্বাদ বদলাবার জন্য।

Exercise 17: There are 5 students: Amrita, Sudeshna, Manish, Kittu and Aditi. You have to pick 3 of these for 1st, 2nd and 3rd prize in a lottery so that no two selected students have the same initial. In how many ways can you do this? ■

6.1.3 Subsets

এখানে আমরা সেইসব অংক দেখব যেখানে কয়েকজনকে এক লাইনে এমনভাবে সাজাতে হবে যাতে কিছু বিশেষ লোক কিছু বিশেষ জায়গার মধ্যেই থাকে (বা না থাকে)।

Example 9: Eighteen guests are to be seated half on each side of a long table. Four particular guests desire to sit on one partcular side and three other on the other side. Determine the number of ways in which the sitting arrangements can be made. **(IIT,1991)**

SOLUTION: এখানে কল্পনা করে নাও একটা লম্বা টেবিল (Fig 8), যার লম্বা ধার দুটো বরাবর নয়টা করে চেয়ার পাতা। এবার আঠেরোজন লোকের মধ্যে চারজন বসতে চায় ধরো ফুলদানির দিকটায়, তিনজন তার উলটো দিকে, এবং বাকিদের কোনো বাছবিচার নেই, কোথাও একটা বসতে পেলেই হল।

- Place the 4 guests on their side of choice: ${}^9P_4$.
- Place the 3 guests on the other side: ${}^9P_3$.
- Place the remaining $18-4-3=11$ guests in the remaining 11 seats: $11!$ ways.

So, by multiplication principle, the answer is ${}^9P_4 \times {}^9P_3 \times 11!$.

■

Example 10: Eight chairs are numbered 1 to 8. Two women and three men wish to occupy one chair each. First the women choose the chairs from amongst the chairs marked 1 to 4, and then the men select the chairs from amongst the remaining. Find the number of possible arrangements. **(IIT,1982)**

SOLUTION:

- Place the 2 women among chairs marked 1 to $4:$ ${}^4P_2$ ways.
- Place the 3 women among the remaining $8-2=6$ chairs: ${}^6P_3$ ways.

So, by multiplication principle, the answer is ${}^4P_2 \times {}^6P_3$.

■

6.1.4 Digits

এবার কিছু অংক করব যেখানে digit সাজিয়ে সাজিয়ে বিভিন্ন শর্ত মেনে সংখ্যা বানাব।

Example 11: How many six digit numbers are there in which no digit is repeated, even digits apear at even places, odd digits apear at odd places and the number is divisible by 4?

(A) 3600 (B) 2700 (C) 2160 (D) 1440

(KVPY.SB/SX.2010)

SOLUTION: কল্পনা করো যেন 6-টা digit-এর জন্য 6-টা জায়গা আছে, এক, দুই, ইত্যাদি নম্বর দেওয়া--

___	___	___	___	___	___
1 নং	2 নং	3 নং	4 নং	5 নং	6 নং

এই প্রত্যেকটা জায়গায় তোমাকে 0 থেকে 9 অব্ধি একটা কিছু সংখ্যা বসাতে হবে, যাতে প্রশ্নের শর্তগুলো সব পালিত হয়। অনেকগুলো শর্ত দিয়েছে, কোনটা থেকে শুরু করলে সুবিধা হবে বোঝা কঠিন। এর জন্য 4 দিয়ে ভাগ যাওয়ার একটা কায়দা কাজে দেবে--কোনো সংখ্যা 4 দিয়ে ভাগ কেবল তখনই যাবে যখন তার একক এবং দশক মিলিয়ে যে সংখ্যাটা হবে, সেটা 4 দিয়ে ভাগ যাবে।

চট্ করে ভেবে নিই দুই ঘরের কি কি সংখ্যা আছে যারা 4 দিয়ে ভাগ যায়--$00, 04, 08, 12, 16, ..., 92, 96$ ইত্যাদি অনেক সংখ্যা আছে। আমাদের কিন্তু আরো একটা শর্ত দিয়েছে--odd ঘরগুলোতে odd সংখ্যা বসাতে হবে। সুতরাং 5 নম্বর ঘরে (মানে দশকের ঘরে) একটা বিজোড় সংখ্যা বসবে। ব্যস্ এবার তবে 5 আর 6 নম্বর ঘর মিলিয়ে খালি এই সংখ্যাগুলো হতে পারে--$12, 16, 32, 36, ..., 92, 96$. লক্ষ কর যে দশকে যে কোনো odd সংখ্যা বসতে পারে, কিন্তু এককের ঘরে সর্বদাই 2 বা 6 থাকতে বাধ্য। তার মানে বিজোড় জায়গাগুলোতে যে কোনো বিজোড় সংখ্যা বসতে পারে, জোড় জায়গাগুলোতে যে কোনো জোড় সংখ্যা, খালি ছয় নম্বর জায়গায় (মানে এককের ঘরে) বসতে পারে কেবল 2 আর 4.

We have 5 odd digits: $1, 3, 5, 7$ nd 9. Also we have 5 even digits $0, 2, 4, 6$ and 8.

The given condition means:

- all the digits are distinct,
- the units place ((position 6) contains 2 or 4,
- any three distinct odd digits occur at positions 1, 3 and 5,
- any two even digits occur at positions 2 and 4.

এবার তাহলে ধাপে ধাপে এগোই--

- Fill 6-th position: 2 ways.
- Pick 3 odd digits for the odd positions: ${}^5P_3$ ways.
- Pick 2 even digits for the even positions: ${}^4P_2$ ways (because we are picking from the remaining $5 - 1 = 4$ even digits).

> So, by multiplication principle, the answer is $2 \times^5 P_3 \times^4 P_2 = 1440$.

■

Example 12: A five digit number divisible by 3 is to be formed using the numbers 0,1,2,3,4 and 5, without repetition. The total number of ways this can be done is (A) 216 (B) 240 **(IIT,1989)**

SOLUTION: এই অংকে যেটা কাজে লাগবে সেটা হল 3 দিয়ে কোনো সংখ্যা ভাগ যাওয়ার শর্ত--সবগুলো digit-এর যোগফলটা 3 দিয়ে ভাগ যেতে হবে।

লক্ষ কর যে আমাদের হাতে ছয়টা digit দিয়েছে, আর বানাতে বলেছে একটা পাঁচ digit-এর সংখ্যা। কোনো digit একাধিকবার ব্যবহার করা যাবে না। সুতরাং ঠিক একটা digit-ই অব্যবহৃত থাকবে। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে কাদেরকে বাদ দেওয়া যাবে। যেমন ধরো 2-কে কি বাদ দেওয়া যাবে? যদি দিই, তবে ব্যবহৃত digit-গুলো হবে $0, 1, 3, 4, 5$, যাদের যোগফল 13, যেটা 3 দিয়ে ভাগ যাচ্ছে না। সুতরাং চলবে না। সুতরাং বাদ দেওয়া যাবে খালি 0 বা 3-কে।

> Only one digit will be unused. It must be either 0 or 3, as the sum of the used digits must be divisible by 3.

এবার 0-টা নিয়ে একটু ঝামেলা আছে। ওটা আবার একেবারে বাঁদিকে বসতে পারে না (তা হলে সংখ্যাটা আর 5 digit-এর থাকবে না, যেমন 01245.) অবশ্য 0 যদি বাদ দিই তবে সে সমস্যা নেই, সেই কেসটাই প্রথমে করি--

> Case 1: If 0 is unused, then we can arrange the remaining 5 digits in $5!$ ways.

এবার 0-ওয়ালা কেসটা দেখি--

> Case 2: If 3 is unused then the total number of ways may be found as follows.
>
> - Place the $0 : 4$ ways (avoiding the leftmost position).
> - Permute the remaining $5 - 1 = 4$ digits: $4!$ ways.

এবার addition principle এবং multiplication principle–

> So, by the addition and multiplication principles, the total number is $5! + 4 \times 4! = 4!(5 + 4) = 216$.

■

Example 13: Find the sum of all distinct four digit numbers that can be formed using the digits 1, 2, 3, 4, 5, each digit appearing at most once. **(BST-BMT2013)**

SOLUTION: এই অংকটা কি করে হবে বোঝার জন্য একটা ছোটো উদাহরণ নিই। ধরো আমরা খালি $1, 2, 3$ এই digit কয়টা ব্যবহার করব। এদের কোনোটাকেই একাধিকবার ব্যবহার না করে মোট যত দুই ঘরের সংখ্যা বানানো যায় তাদের

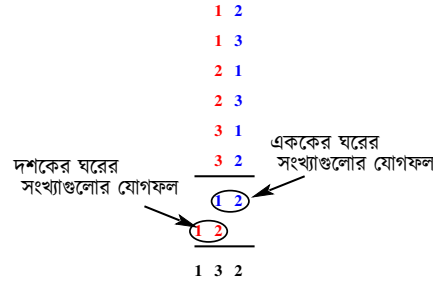



Fig 9

দেখিয়েছি Fig 9-এ। লক্ষ কর যে, এককের ঘরে $1, 2, 3$ প্রত্যেকেই ঠিক 2-বার করে এসেছে। কারণটা বোঝাই যায়, এককের ঘরে যদি 1 বসাও তবে দশকের ঘরটা ঠিক দুইভাবেই ভরা যায়। একই কথা খাটে এককের ঘরে বাকিদের বসালেও। সুতরাং এককের ঘরের সংখ্যাগুলো সব যোগ করলে পাব

$$2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 = 2 \times (1 + 2 + 3) = 12.$$

ঠিক একই কথা খাটে দশকের ঘরের ক্ষেত্রেও। সেখানেও প্রত্যেকটা digit ঠিক দুবার করে আসবে। সুতরাং দশকের সংখ্যাগুলো সব যোগ করলে 12×10 পাবে। এখানে 10-টা এসেছে দশকের ঘর বলে। সুতরাং সব মিলিয়ে হল

$$12 + 12 \times 10 = 12 \times 11 = 132.$$

এবার আমাদের অংকে ফিরে আসি--

> Each number occurs in the units place exactly ${}^4P_3$ times. So the sum of the units digits is ${}^4P_3 \times (1 + \cdots + 5) = 60$.
>
> Similarly the contribution of the tens place is 60×10.
>
> Continuiting in this way the total sum is
>
> $$60 \times (1 + 10 + 100 + 1000) = 66660.$$

■

এবার যে অংকটা করব তার জন্য একটা summation-এর কায়দা জানা থাকলে সুবিধা হবে। মনে করো এই যোগফলটা বার করতে বললাম--

$$ab + ab^2 + ab^3 + a^2b + a^2b^2 + a^2b^3.$$

লক্ষ কর এখানে a-র power-গুলো হল $1, 2$, এবং b-এর power-গুলো হল $1, 2, 3$. যদি আমরা যাবতীয় a-ওয়ালা term-কে এক জায়গায় করে ওদের থেকে a-টা কমন নিয়ে নিই, আর a^2-ওয়ালাদের থেকে a^2 কমন নিই, তবে পাব--

$$a(b + b^2 + b^3) + a^2(b + b^2 + b^3) = (a + a^2)(b + b^2 + b^3).$$

এই জিনিসটাকে summation দিয়ে সুন্দরভাবে লেখা যায়--

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a^i b^j = \left(\sum_{i=1}^{2} a^i \right) \left(\sum_{j=1}^{3} b^j \right).$$

এবার এটা ব্যবহার করব নীচের অংকটায়।

Example 14: The sum of all even positive divisors of 1000 is

(A) 2170 (B) 2184 (C) 2325 (D) 2340

(BStat2010.11)

SOLUTION: এই অংকটা শুরু হবে 1000-এর prime factorisation বার করে। এরকম অংক একটা আমরা ইতিমধ্যেই দেখেছি।

> The prime factorisation of 1000 is $2^3 \times 5^3$.
> All positive divisors are of the form $2^i 5^j$ for $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

একটা factor কখন even হবে? যখন 2 দিয়ে ভাগ যাবে, মানে অন্ততঃ একটা prime factor হবে 2. আমরা 2-এর সংখ্যা নিয়েছি i. সুতরাং even হওয়া মানে $i > 0$.

> It is even if $i > 0$.

এইবারই সেই summation-এর প্যাঁচ--

> So the required sum is
>
> $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3} 2^i 5^j = \sum_{i=1}^{3} 2^i \sum_{j=0}^{3} 5^j = (2 + 2^2 + 2^3)(5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3) = 14 \times \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = 2184.$$

■

Exercise 18: If the sum of all factors of m is S, and the sum of all factors of m is T, then show that the sum of all factors of mn is ST. ■

DAY 7
Distinct, unordered, no repetition (part 1)

এতক্ষণ আমরা কিছু distinct জিনিসদের সাজাচ্ছিলাম, যেখানে order ছিল গুরুত্বপূর্ণ, কোনো repetition ছিল না। এবার যে অংকগুলো দেখব সেখানেও ব্যাপারটা একইরকম, খালি এবার order-টা গুরুত্বপূর্ণ নয়। এখানে প্রধান হাতিয়ার হবে multiplication principle এবং division principle.

7.1 তৃতীয় notation: combination

ইতিমধ্যেই আমরা দুটো notation শিখেছি, factorial আর permutation. এবার এরকমই আরেকটা notation শিখতে চলেছি।

Example 15: ধরো 4-টে ছাত্র আছে A, B, C, D, যেমন দেখিয়েছি Fig 10-এ। তাদের থেকে 2 জনের একটা দলকে কুইজ কনটেস্টে পাঠাতে হবে। ছাত্ররা যে distinct হয় সেটা তো জানিই। ছবিতেও তাই ওদের আলাদা রং দিয়ে এঁকেছি। একজন ছাত্রকেই যে একই দলে একাধিকবার নেওয়া যায় না, সেটাও বলাই বাহুল্য। অতএব repetition করা যাচ্ছে না।

Fig 10 **Fig 11**

যেহেতু আমরা এখানে "দল" নিয়ে কাজ করছি, তাই কে আগে, কে পরে তা নিয়ে আমাদের মাথাব্যথা নেই, তাই unordered. যেমন যদি A-র সঙ্গে B যায় তাহলেও যা দল, আবার B-র সঙ্গে A গেলেও তাই (Fig 11)। এই প্রসঙ্গে "হীরক রাজার দেশে" সিনেমার একটা লাইন মনে পড়ে গেল। গুপি-বাঘার দেশ দেখতে যাবার শখ হয়েছে, গুণ্ডির রাজা তাদের একা একা ছেড়ে দিতে দুশ্চিন্তা করছেন, তাতে গুপি-বাঘা পরস্পরকে দেখিয়ে বলছে--না, না, একা কোথায়, আমার সঙ্গে ও যাবে, আর ওর সঙ্গে আমি!
"কে আগে কে পরে" সেটা যে গুরুত্বপূর্ণ নয় সে কথাটা অংকের ভাষায় দুভাবে লিখে বোঝানো যায়।

- এক, unordered শব্দটা দিয়ে, যেমন আমরা করেছি।
- দুই, $\{...\}$ লিখে, যেমন $\{A, B\}$ মানে A, B মিলে তৈরী set, কে আগে কে পরে তা নিয়ে কোনো মাথাব্যথা নেই। যদি মাথাব্যথা থাকত তবে $(...)$ লিখতাম, যেমন (A, B).

এখানে একটা কৌশল করে এগোব যেটা বহু জায়গাতে কাজে লাগে। প্রথমে আমরা unordered-এর কথা ভুলে ordered-এর জন্য উত্তরটা বার করব। উত্তরটা হবে $^4P_2 = 4 \times 3 = 12$. এই বারোটা সম্ভাবনা দেখিয়েছি Fig 12-এ। লক্ষ কর যে আমাদের অংকে যেহেতু unordered নিয়ে কাজ করতে বলেছিল, তাই AB আর BA আমাদের কাছে একই ব্যাপার। একইভাবে AC আর CA দল হিসেবে একই, ইত্যাদি। সুতরাং 12-খানা সম্ভাবনা জোড়ায় জোড়ায় 6-টা গুচ্ছে পরিণত হল।

Fig 12

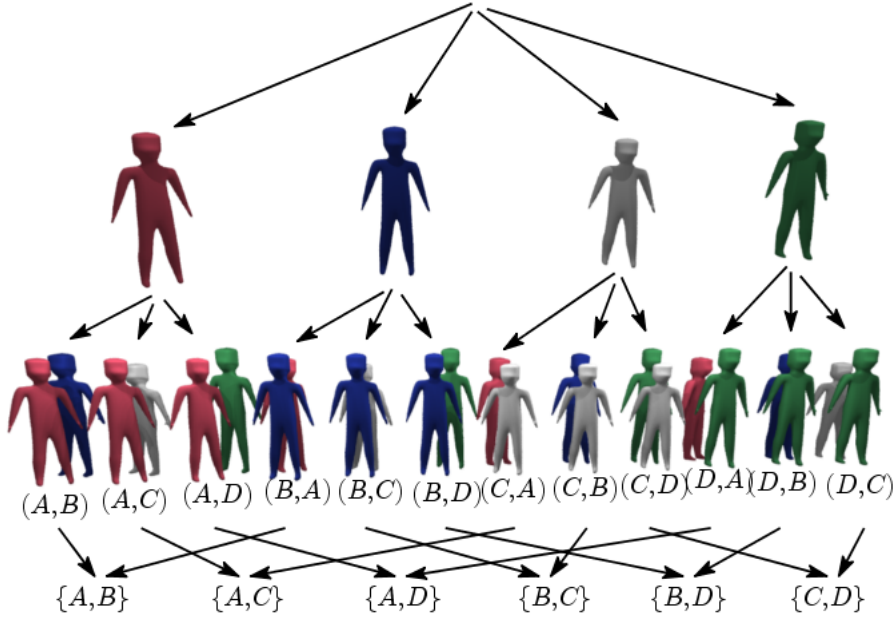
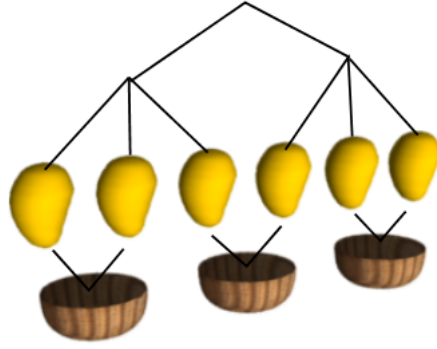



Fig 13

তাই division principle লাগিয়ে উত্তর পাই $12/2 = 6$. আশা করি Fig 12-র সঙ্গে আমকে ঝুড়িতে ভরার (মানে গত অধ্যায় থেকে তুলে আনা Fig 13-এর) সাদৃশ্যটা তোমার চোখে পড়ছে। ■

এখানে জোড়ায় জোড়ায় গুচ্ছ হল, কারণ আমরা দুটো করে ছাত্র নিচ্ছিলাম। যদি তিনটে করে নিতাম তবে লক্ষ কর যে ABC, ACB, BCA, BAC, CAB আর CBA আসলে একই দল। তার মানে এখানে গুচ্ছগুলোর সাইজ হল $3! = 6$. যদি n-খানা ছাত্রদের থেকে r জনকে নিয়ে দল বানাতে হত তবে ordered ধরলে উত্তরটা হত ${}^nP_r$. আর গুচ্ছগুলোর সাইজ হত $r!$. সুতরাং division principle থেকে unordered-এর বেলায় উত্তর হবে ${}^nP_r/r!$. এর একটা প্রচলিত নাম আছে--

DEFINITION: Combination

For nonnegative integers n, r with $r \leq n$ we define <u>the number of combinations of n distinct objects taken r at a time</u> as

$$ {}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}. $$

In short, we call this "n choose r."

এই সংজ্ঞাটার একটা general সংস্করণ আছে, সেখানে n যেকোনো সংখ্যা হতে পারে, negative, fraction, $\sqrt{2}$, যা খুশি! কিন্তু r-কে এখানেও nonnegative integer হতে হবে। সেক্ষেত্রে অবশ্য আমরা আর combination শব্দটা ব্যবহার করিনা, তখন বলি binomial coeffcient. তার সংজ্ঞাটা এইরকম--

DEFINITION: Binomial coeffcient

For any real number n and any nonnegative integer r we define

$$ \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\times\cdots(n-r+1)}{r!}. $$

তবে এই বইতে এই general সংজ্ঞাটা আমরা কোথাও ব্যবহার করব না। যদিও $\binom{n}{r}$ এই notation-টা মাঝে-সাঝে উঁকি দেবে। যখন n একটা positive integer, আর $r \in \{0, ..., n\}$, তখন $\binom{n}{r}$ এবং ${}^nC_r$ সমার্থক।
এই যে আমরা দুটো চিহ্ন শিখলাম, ${}^nP_r$ এবং ${}^nC_r$, এই দুটো notation কিন্তু multiplication principle আর division principle-এর দুটো বিশেষ প্রয়োগ মাত্র। দুঃখের বিষয় অনেক ছাত্রই ${}^nP_r$ আর ${}^nC_r$-কে প্রায় ভগবান বলে ভাবতে থাকে, যেন সব অংকই হয় P নয়তো C দিয়ে কষে ফেলা যায়। যখন combinatorics-এর অংক করবে তখন যেন তোমার মনে "P লাগাব নাকি C লাগাব?" জাতীয় প্রশ্ন না আসে। তার চেয়ে ভালো প্রশ্ন বরং-- " multiplication principle লাগাব, নাকি division principle, নাকি addition বা subtraction principle?"

7.2 Properties

${}^nC_r$-এর কিছু ধর্ম খেয়াল রাখলে কাজ করা সহজ হয়। তার মধ্যে সবচেয়ে সহজ কয়েকটা এখানে বলি, বাকিগুলো যথা সময়ে আসবে।

THEOREM

For any positive intger n we have

$${}^nC_0 = 1, \quad {}^nC_1 = n, \quad {}^nC_{n-1} = n, \quad {}^nC_n = 1.$$

এগুলো সরাসরি সংজ্ঞা থেকেই চলে আসে। আরেকটা কাজের জিনিস হল এইটা--

THEOREM

For any positive integer n and any $r \in \{0, 1, ..., n\}$ we have

$${}^nC_r = {}^n C_{n-r}.$$

এইটা কেন হয় সেটা বোঝা খুবই সহজ। মনে কর 20-টা ছাত্র আছে, তাদেরকে দুটো দলে ভাগ করতে হবে, একদলে 5 জন আর অন্যদলে বাকি 15 জন। আমি কাজটা দুভাবে করতে পারি--

- এক, প্রথমে 5 জনকে নির্বাচন করি, তারা যাবে প্রথম দলে, আর অবশিষ্টরা দ্বিতীয় দলে। এইভাবে দেখলে কাজটা করা যাচ্ছে ${}^{20}C_5$ ভাবে।
- দুই, প্রথমে 15 জনকে নির্বাচন করি, এরা যাবে দ্বিতীয় দলে, বাকি 5 জন চলে যাবে প্রথম দলে। এবার হিসেব হচ্ছে ${}^{20}C_{15}$.

আশা করি সন্দেহ নেই যে এই দুটো পদ্ধতিই আসলে একই কাজ করছে। তাই ${}^{20}C_5 = {}^{20} C_{15}$ হবে। এবার 20-র জায়গায় n আর 5-এর জায়গায় r কল্পনা করলেই theorem-টা পেয়ে যাবে।
এই theorem-টা কেন কাজের জিনিস সেটা এবার বলি। আমরা জানি যে

$${}^nC_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

মানে উপরেও r-খানা জিনিসের গুণ, নীচেও তাই। যদি r বড় হয় তবে বার করতে প্রাণ বেরিয়ে যাবে। ধরো আমাদের উপরের উদাহরণে ${}^{20}C_{15}$ বার করতে দিল। তবে তুমি কি এইভাবে করবে?

$${}^{20}C_{15} = \frac{20 \times 19 \times \cdots \times 6}{15!}?$$

না, কারণ আমরা জানি যে ${}^{20}C_{15} = {}^{20}C_5$, এবং

$$ {}^{20}C_5 = \frac{20 \times 19 \times \cdots \times 16}{5!} $$

বার করা অনেক বেশী সহজ।

7.3 হাতেকলমে

প্রথম অংকটা একেবারেই সহজ।

Exercise 19: In how many ways can you select a group of 5 boys from 10 boys? ■

পরেরটা শূন্যস্থানপূরণের অংক।

Exercise 20: In how many ways can you select a subset consisting of 5 green and 3 black balls from an urn[1] containing 7 green and 6 black balls? [Balls are assumed distinct]
HINT:

- Pick 5 from the 7 green balls: [a] ways.
- Pick 3 from the 6 black balls: [b] ways.

So by multiplication principle, the answer is [c].

■

Exercise 21: A college has 10 first year students, 8 second year students and 5 third year students. In how many ways can you make a team of 4 students such that each year is respected?
HINT: একটু ধরিয়ে দিই। এখানে "each year is respected" মানে প্রত্যেকটা year থেকেই অন্ততঃ একজন ছাত্র নিতে হবে। যেহেতু ছাত্র নিতে হবে 4 জন অথচ year আছে মোটে তিনটে, তাই বুঝতেই পারছ তার জন্য কোনো একটা year থেকে ঠিক দুজন ছাত্র নিতে হবে। কোন year থেকে সেটা করবে সেটা কয়ভাবে ঠিক করা যায়? এবার নিজে নিজে কর। ■

Exercise 22: There are 4 letters and 4 addressed envelopes (the addresses are all different). In how many ways can you put the letters in the envelopes so that exactly two letters are in their correct envelopes? ■

Example 16: A box contains two white balls, three black balls and four red balls. In how many ways can three balls be drawn from the box, if at least one black ball is to be included in the draw? **(IIT,1986)**
SOLUTION: এখানে "at least one" আছে, সুতরাং subtraction principle-এর গন্ধ পাচ্ছ নিশ্চয়ই?

[1] এক ধরণের বাহারি ফুলদানির মত পাত্র।

> Total number of ways to draw 3 balls from $2+3+4=9$ balls is ${}^9C_3$.
>
> Total number of ways to draw 3 balls so that no black ball is selected is ${}^6C_3$.
>
> So the required answer is ${}^9C_3 - {}^6C_3$.

■

Example 17: Using only the digits $2, 3$ and 9, how many six digit numbers can be formed which are divisible by 6?

(A) 41 (B) 80 (C) 81 (D) 161

(ISI2014.4)

SOLUTION: সহজ বুদ্ধিতে ভাবা শুরু করি-- একটা সংখ্যা কি হলে 6 দিয়ে ভাগ যায়? যখন 2 আর 3 দুটো দিয়েই ভাগ যায়।

> We need the number to be divisible by 6, ie, divisible by both 2 and 3.

আমরা সংখ্যাটা তৈরী করব কিছু digit বসিয়ে বসিয়ে। সুতরাং জানা দরকার কোন কোন digit কিভাবে বসালে এই দুটো শর্ত পালিত হবে। 2 দিয়ে ভাগ যাওয়া মানে সংখ্যাটা even (জোড়) বানাতে হবে, এবং তার জন্য এককের ঘরে একটা even digit রাখলেই হবে। আমাদের যে কটা digit দিয়েছে তার মধ্যে even আছে খালি 2. সুতরাং এককের ঘরে সেটাই বসাতে হবে।

> To make it divisible by 2, we need an even number is the units place. In our case, we need 2 in the units place.

কোনো সংখ্যা 3 দিয়ে ভাগ যাওয়ার নিয়ম হল digit-গুলোর যোগফল 3 দিয়ে ভাগ যেতে হবে। এখানে digit আছে $2, 3$ আর 9. তার মধ্যে 3 আর 9 এমনিতেই 3 দিয়ে ভাগ যায়। সুতরাং ওই digit-গুলো যতবার খুশি ব্যবহার করতে পারি। কিন্তু 2 রাখতে হবে তিনটে কিংবা ছয়টা। এই কথাটা বুঝলে তো?

> Also the sum of digits must be divisible by 3. So there must be either exactly three 2's or exactly six 2's.

সুতরাং এই বার ব্যাপারটা দুইভাগে ভেঙে গেল--তিনটে 2, নাকি ছয়টা 2? সুতরাং দুটো কেসে ভেঙে নিলে সুবিধা হবে, অতএব addition principle. দেখলে, সহজ বুদ্ধি থেকেই কিরকম addition principle বেরিয়ে এল?

> Case 1: Exactly three 2's:
>
> 1. Place a 2 in the units place: 1 way.
> 2. Choose two places from the remaining five places for the remaining 2's: ${}^5C_2 = 10$ ways.
> 3. Place a 3 or 9 in each of the remaining three places: $2^3 = 8$ ways.
>
> So the total number of ways under this case is $1 \times 10 \times 8 = 80$.

Case 2: Exactly six 2's: there is only one such 6 digit number: 222222.

So there is only one way under this case.

Hence by addition principle, the required answer is $80 + 1 = 81$.

■

Exercise 23: A committee of 12 is to be formed from 9 women and 8 men. In how many ways can this be done if at least five women have to be included in the committee? In how many of these committees

1. the women are in majority?
2. the men are in majority?

(IIT,1994)

HINT:

আমাদের বানাতে হবে 12 জনের একটা কমিটি $8 + 9 = 17$ জন মানুষের থেকে। কমিটি মানে একধরণের দল, সুতরাং unordered. দুটো মানুষ সবসময়েই আলাদা হয়, সুতরাং 17 জন distinct. একই কমিটিতে একই লোক একাধিকবার থাকতে পারে না, অতএব no repetition. ব্যাপারটা খালি এই অব্দি হলে অসুবিধা ছিল না, মোট কমিটির সংখ্যা এক কথায় বলতে পারতাম $^{17}C_{12}$. সমস্যা হল আরও একটা শর্ত চাপিয়েছে--মহিলা সদস্যসংখ্যা অন্ততঃ 5 হতে হবে। চট্ করে ভেবে নিই এমনিতে কতজন মহিলা নেওয়া যেত। যেহেতু কমিটিতে 12 জন সদস্য লাগবে, আর পুরুষ আছে মোটে 8 জন, সুতরাং অন্ততঃ $12 - 8 = 4$ জন মহিলা নিতেই হত। তার মানে বাড়তি শর্তটার জন্য সামান্যই পরিবর্তন হয়েছে, খালি সেই সব কমিটিগুলো নেওয়া যাবে না, যেখানে মহিলাসংখ্যা ঠিক 4. বুঝতেই পারছ যে এখানে subtraction principle কাজে লাগবে।

Since number of men $= 8$, and committee size $= 12$,

so the number of women in the committee must be $\geq$ [a].

By the given condition the number of women members must be $\geq$ [b].

So the number of such committees is (total number of committees - committees with exactly 4 women).

The total number of committees is [c].

All committees with exactly 4 women can be formed as follows.

- Pick 4 women from 8 women: [d] ways.
- Pick $12 - 4 = 8$ men from 8 men: [e] way.

So, by multiplication principle, the number of committees with exactly 4 women is [f].

> So the total number of committees with at least five women is [g].

এই গেল প্রথম অংশ। এবার দেখতে হবে কখন ছেলেরা সংখ্যায় বেশী, আর কখন মেয়েরা। মেয়েদের সংখ্যা হতে পারে $5, 6, 7, 8, 9$. যদি 5 হয় তবে ছেলেরা সংখ্যায় বেশী, 6 হলে সমান সমান, $7, 8, 9$ হলে মেয়েরা দলে ভারী। আমরা প্রথমে গুণব ঠিক 5-টা মেয়েওয়ালা কমিটির সংখ্যা, সেটা হবে (1) নম্বর প্রশ্নের উত্তর। তারপর বার করব ঠিক 6-টা মেয়েওয়ালা কমিটির সংখ্যা। সেখানে থেকে subtraction principle লাগিয়ে (2) নম্বর অংকের উত্তর পেয়ে যাব।

> (1) Men will be in majority if there are exactly 5 women. Such committees can be counted as follows.
>
> - Pick 5 out of 9 women: [h] ways.
> - Pick $12 - 5 = 7$ out of 8 men: [i] ways.
>
> So, by multiplication principle, the answer is [j].

এবার শেষ অংশ--

> (2) Women will be in majority is there are exactly 7 or 8 or 9 women.
>
> Committees with exactly 6 women can be counted as follows.
>
> - Pick 6 out of 9 women: [k] ways.
> - Pick $12 - 6 = 6$ out of 8 men: [ℓ] ways.
>
> So, by multiplication principle, the number of such committees is [m]
>
> So, by subtraction principle, the answer is [n].

■

Example 18: 7 relatives of a man comprises 4 ladies and 3 gentlemen. His wife also has 7 relatives; 3 of them are ladies and 4 are gentlemen. In how many ways can they invite a dinner party of 3 ladies and 3 gentlemen so that there are 3 of the man's relatives and 3 of the wife's relatives? **(IIT,1985)**

SOLUTION: অভ্যাগতদের সংখ্যা নিয়ে একটা টেবিল বানানো যাক।

> Let the invited relatives be as follows.

	Gentlemen	Ladies	Total
Man's relatives	a	b	3
Wife's relatives	c	d	3
Total	3	3	6

এই একটা টেবিলেই বলা হয়ে গেল যে, a হল অভ্যাগতদের মধ্যে গৃহস্বামীর মহিলা আত্মীয়দের সংখ্যা, আর b হল তাঁর পুরুষ আত্মীয়দের সংখ্যা। একইভাবে নিমন্ত্রিতদের মধ্যে গৃহিণীর মহিলা এবং পুরুষ আত্মীয়দের সংখ্যা হল যথাক্রমে c এবং d.

Now, we observe that $b = c = 3 - a$ and $d = 3 - b = a$. So
The total number of ways in which this table can be achived is

1. Pick a out of the 3 female relatives of the man: ${}^3C_a$ ways.
2. Pick $3 - a$ out of the 4 male relatives of the man: ${}^4C_{3-a}$ ways.
3. Pick $3 - a$ out of the 3 female relatives of the woman: ${}^3C_{3-a}$ ways.
4. Pick a out of the 4 male relatives of the woman: ${}^4C_a$ ways.

So, by the multiplication principle, the number of ways to achieve this table is

$$N(a) = {}^3C_a {}^4C_{3-a} {}^3C_{3-a} {}^4C_a = N(a), \text{ say.}$$

We can have $a = 0, 1, 2, 3$ the values of $N(a)$ are

a	$N(a)$
0	4
1	216
2	216
3	4

So the required answer is $N(0) + N(1) + N(2) + N(3) = 440$.

■

Example 19: Let A be the set $\{1, 2, ..., 20\}$. Fix two disjoint subsets S_1 and S_2 of A, each with exactly three elements. How many 3-element subsets of A are there, which have exactly one element common with S_1 and at least one element common with S_2?

(A) 51 (B) 102 (C) 135 (D) 153

(BStat2011.6)

SOLUTION: এই অংকের বর্ণনাটা পড়ে মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। ধীরে ধীরে বোঝা যাক। $A = \{1, 2, ..., 20\}$. সেটুকু বুঝতে কোনো অসুবিধা নেই। এবার বলেছে এর দুটো subset নিতে, S_1 আর S_2, যাদের এই কয়টা গুণ থাকতে হবে--এক, দুজনের মধ্যেই ঠিক তিনটে করে সংখ্যা থাকবে, আর দুই, ওরা disjoint হবে, মানে ওদের মধ্যে কোনো সংখ্যা "কমন" থাকবে না। এরকম দুটো subset-কে গোড়াতেই fix করে নিতে বলেছে, মানে একবার ঠিক করে নেওয়ার পর ওরা পুরো অংকে আর বদলাবে না। সেই মত আমরা দুটো subset নিই, ধরো $S_1 = \{1, 2, 3\}$ আর $S_2 = \{4, 5, 6\}$ নিলাম। প্রশ্নের ভাষা থেকেই বোঝা যাচ্ছে যে অন্য কোনো S_1, S_2 নিলেও উত্তরটা শেষ পর্যন্ত একই আসত। এবার জানতে চেয়েছে এমন

কতগুলো subset সম্ভব যাদের এই তিনটে বৈশিষ্ট্য আছে--এক, ঠিক তিনটে সংখ্যা দিয়ে তৈরী, দুই, S_1-এর সঙ্গে ঠিক একটাই সংখ্যা "কমন", আর তিন, S_2-এর সঙ্গে অন্ততঃ একটা সংখ্যা "কমন"। যেমন ধরো $\{1, 4, 5\}$ নিলে চলবে, কিন্তু $\{1, 2, 4\}$ নিলে চলবে না (কারণ S_1-এর সঙ্গে দুটো সংখ্যা "কমন" হয়ে গেছে)।
এখানে আমরা প্রথমে "at least one element in common with S_2" শর্তটাকে বাদ দিয়ে ভাবব। তাহলে সরাসরি multiplication principle লাগানো যাবে। তারপর দেখব শর্তটাকে বাদ দেওয়ার ফলে কতগুলো বাড়তি জিনিস ঢুকে পড়েছে। আলাদা করে তাদের সংখ্যাও বার করা যাবে multiplication principle দিয়ে। এবার বিয়োগ করে দিলেই ঠিক উত্তরটা পেয়ে যাব।
প্রথমে তাহলে শর্তটা বাদ দিয়ে কাজ করি।

> We count all 3-element subsets of A with exactly one element in common with S_1 as follows.
>
> - Pick the element common with S_1 : 3 ways.
> - Pick two elements outside S_1 : ${}^{20-3}C_2 = {}^{17}C_2$ ways.
>
> So, by multiplication principle, the number is $3 \times {}^{17}C_2$.

এবার বাদ দেব সেই সব subset যাদের মধ্যে S_2-র একটাও element নেই। "অন্ততঃ একটা" উল্টে হয় "একটাও নয়"।

> We count all 3-element subsets of A with exactly one element in common with S_1 and no element in common with S_2 as follows.
>
> - Pick the element common with S_1 : 3 ways.
> - Pick two elements outside both S_1 and S_2 : ${}^{20-6}C_2 = {}^{14}C_2$ ways.
>
> So, by multiplication principle, the number is $3 \times {}^{14}C_2$.
> So, by subtraction principle, the required answer is $3 \times {}^{17}C_2 - 3 \times {}^{14}C_2 = 3 \times \frac{17\times16-14\times13}{2} = 135$.

■

Exercise 24: একজন ছাত্র উপরের অংকটাকে স্রেফ multiplication principle দিয়ে ঘায়েল করার চেষ্টা করেছে এইভাবে--

> প্রথমে S_1 থেকে একটা element নিই (3-ভাবে), তারপর S_2 থেকে একটা নিই (সেটাও 3-ভাবে), এবার তৃতীয় element-টা S_1-র বাইরে থেকে যা খুশি নিলেই হবে ($17 - 1 = 16$-ভাবে, কারণ S_1-এর বাইরে 17-টাই element আছে, তার মধ্যে থেকে একটা তো দ্বিতীয় ধাপেই নেওয়া হয়ে গেছে)। সুতরাং multiplication principle লাগিয়ে উত্তর হল $3 \times 3 \times 16 = 144$.

ও কোথায় ভুল করেছে? আগেই বলেছি, "অন্ততঃ একটা"-ওয়ালা অংকে সাবধানে পা ফেলতে হয়! ■

নীচের অংকটা একইরকম, তোমার করার জন্য।

Exercise 25: Let A be the set $\{1, 2, ..., 20\}$. Fix two disjoint subsets S_1 and S_2 of A, where S_1 has three elements and S_2 has 7 elements. How many 3-element subsets of A are there,

which have exactly one element common with S_1 and at least one element common with S_2? ■

DAY 8
Distinct, unordered, no repetition (part 2)

8.1 আরও অংক

8.1.1 জ্যামিতি

নীচের অংকটা আমরা এখন একভাবে করব। বইয়ের শেষের দিকে গিয়ে আরেকটা কায়দা বলব।

Exercise 26: How many triangles can be inscribed in a regular convex n-gon with labelled vertices? How many if adjacent vertices are not allowed?

HINT:

> Every set of 3 vertices produces an inscribed triangle. So the number of such triangles is [a].

এবার সেই সব ত্রিভুজকে বাদ দেব যাদের ঠিক একটা side হল polygon-টার একটা side. এর জন্য Fig 14-এর দিকে চোখ রাখো।

> Among these the number of triangles using exactly one pair of adjacent vertices can be counted as:
>
> - Pick a side of the polygon as the base of the triangle: [b] ways.
> - Pick the third vertex of the triangle: [c] ways.

এবার সেই সব ত্রিভুজ বাদ দিতে হবে, যারা polygon-টার দুটো side ব্যবহার করেছে (Fig 15)।

Fig 14

প্রথমে একটা side নাও...

তারপর একটা দূরের vertex-এর সাথে যোগ করো.

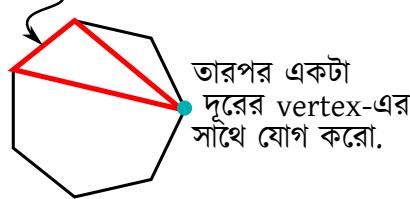
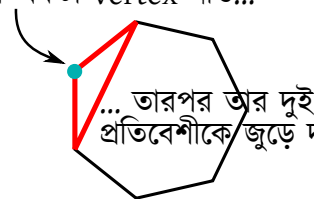



Fig 15

প্রথমে একটা vertex নাও...

... তারপর তার দুই প্রতিবেশীকে জুড়ে

> Also the number of triangles using exactly two pairs of adjacent vertices can be counted as:
>
> - Pick a vertex of the polygon: [d] ways.
> - Join its two neighbours: [e] way.
>
> So, by multiplication and subtraction principles, the answer is [f].

■

Exercise 27: Let T_n be the number of all possible triangles formed by joining vertices of an n-sided regular polygon. If $T_{n+1} - T_n = 10$, then the value of n is

(A) 7 (B) 5 (C) 10 (D) 8

(IIT(main),2013)

HINT:

T_n কত হবে সেটা তো আগের অংক থেকেই জানো। যে শর্তটা দিয়েছে সেটা থেকে n-এর একটা quadratic equation (দ্বিঘাত সমীকরণ) পাবে। মনে রেখো যে $n < 0$ হতে পারে না। ■

Exercise 28: Let $n \geq 2$ be an integer. Take n distinct points on a circle and join each pair of points by a line segment. Colour the line segement joining every pair of adjacent points by blue and the rest by red. If the number of red and blue lines are equal, then the value of n is: **(IIT(adv),2014)**

HINT:

> There are exactly n adjacent pairs. So there are [a] blue lines.
>
> The total number of pairs is [b].
>
> So the total number of red lines is [c].
>
> From the given condition, [a]=[c].
>
> Solving, n is either [d] or [e].
>
> But $n \geq 2$.
>
> So $n =$ [f].

■

8.1.2 লুকোনো unordered

আমরা দেখেছি যে সাজানোর সময়ে ordered এবং unordered-এর ক্ষেত্রে উত্তর বিভিন্ন হয়। অনেকসময়ে unordered শর্তটা order-এর আড়ালে লুকিয়ে থাকে, যেমন নীচের অংকটায়।

Example 20: In how many ways can the men A, B, C, D, E, F, G stand in a row so that A, B, C are always in that order (not necessarily side by side)?

SOLUTION: প্রথমে বুঝে নিই কি চাইছে। যদি $ADBCEGF$ হিসেবে রাখি তবে আপত্তি নেই, কারণ B আছে A-র ডানদিকে কোথাও আর C আছে B-এর ডানদিকে কোথাও। কিন্তু যদি $ADCBEGF$ করতাম তবে চলত না,, কারণ C এখানে B-র বাঁদিকে চলে গেছে।

এই ধরণের অংক করার একটা কৌশল আছে। এখানে কোথাও unordered বলা নেই। কিন্তু তাও কেমন unordered-এর যুক্তিটা কাজে লাগবে দ্যাখো।

- Pick 3 positions for A, B and C : ${}^7C_3$ ways.

যেই তিনটে জায়গা পেয়ে গেলে অমনি A, B, C-কে দাঁড় করিয়ে দিতে পারবে। সেটা একভাবেই করা যাবে, কারণ A, B আর C-এর order তো বলাই আছে।

- Place A, B and C according to the given order in those places: 1 way.
- Place D, E, F, G and C in the remaining 4 places: 4! ways.

So, by multiplication princple, the answer is ${}^7C_3 \times 1 \times 4! = 840$.

■

Exercise 29: Three children, each accompanied by a guardian, seek admission in a school. The principal wants to interview all the 6 persons one after the other subject to the condition that no child is interviewed before its guardian. In how many ways can this be done?
(A) 60 (B) 90 (C) 120 (D) 180
(KVPY.SB/SX.2012)

HINT:

এই অংকটা আগেরটার মতই। মূল সূত্রটা ধরিয়ে দিচ্ছি।

Let the guardians be called A, B, C. Let a, b, c be the corresponding children.

এবার আমরা একেকটা গার্জিয়ান-বাচ্চা জুটিকে লাইনে দাঁড় করাব। একটা জুটির জন্য খালি দুটো জায়গা নির্ধারণ করাই যথেষ্ট, কারণ কে আগে কে পরে যাবে সেটা তো বলি দেওয়া আছে--গার্জিয়ান আগে, বাচ্চা পরে।

- Pick 2 from the 6 places for the A, a pair: p ways.
- Pick 2 from the remaining places for the B, b pair: q ways.
- Pick 2 from the remaining places for the C, c pair: r way.
- Place each pair in its selected positions: s way.

> So, by multiplication principle, the required answer is $\boxed{t}$.

■

8.1.3 বিবিধ

Example 21: In how many ways can a pack of 52 cards be

1. divided equally among four players in order?
2. divided into four groups of 13 cards each?
3. divided in 4 sets, three of them having 17 cards each and the fourth just one card?

(IIT,1979)

SOLUTION: প্রথমে তিনটে অংকের মানে বোঝা যাক। এক প্যাকেট তাস আছে, তাতে 52-টা তাস রয়েছে। সেটাকে চার ভাগে ভাগ করতে হবে। প্রথম দুটো অংকে ভাগগুলো সমান সমান হবে, মানে প্রতিটা ভাগে $52/4 = 13$-টা করে তাস থাকবে। পার্থক্য হল এই যে, প্রথম অংকে চারটে ভাগ যাবে চারজন খেলোয়াড়ের কাছে, ফলে কোন ভাগটা কার কাছে যাচ্ছে সেটা গুরুত্বপূর্ণ। সেই কারণে "in order" বলেছে। দ্বিতীয় অংকে এই order-এর ব্যাপারটা নেই। তৃতীয় অংকেও কোনো order-এর ব্যাপার নেই, খালি এবার ভাগগুলো সমান নয়, তিনটে ভাগে 17-টা করে তাস, আর অন্যভাগে মোটে একটা তাস। এর ফলে উত্তরে কি রকম পার্থক্য আসবে সেটা বোঝার জন্য একটা ছোটো উদাহরণ নিই, ধরো প্যাকেটে 52-র জায়গায় খালি 9-টা তাস ছিল, এবং খেলোয়াড়ের সংখ্যাও 4-এর বদলে 3. এদের নাম দিলাম রাম, শ্যাম, যদু। এখানে তাস দেওয়ার একটা কায়দা এরকম হতে পারে--

প্রথম পদ্ধতি: রাম : $1, 2, 3$; শ্যাম : $4, 5, 6$; যদু : $7, 8, 9$.

যদি এইভাবে দিতাম--

দ্বিতীয় পদ্ধতি: রাম : $3, 1, 2$; শ্যাম : $4, 5, 6$; যদু : $7, 8, 9$.

তবে কিন্তু আলাদা কিছু হত না, কারণ রামের হাতের তাসগুলো কে আগে কে পরে তা নিয়ে কিছু এসে যায় না। কিন্তু তবে যে অংকে ordered বলেছিল? ভালো করে পড়ে দ্যাখো, তাসগুলোকে কিন্তু ordered বলে নি, ordered বলেছে খেলোয়াড়দের। অর্থাৎ যদি এইভাবে দিতে--

তৃতীয় পদ্ধতি: রাম : $4, 5, 6$; শ্যাম : $1, 2, 3$; যদু : $7, 8, 9$,

তবে সেটা নিশ্চয়ই আলাদা হিসেবে ধরতে হবে।

> 1) We can do the distribution of cards as follows.
>
> - First, pick the 13 cards for the first player: ${}^{52}C_{13}$ ways,
> - then, pick 13 cards from the remaining $52 - 13 = 39$ cards for the second player: ${}^{39}C_{13}$ ways,
> - next, pick 13 cards from the remaining $39 - 13 = 26$ cards for the third player: ${}^{26}C_{13}$ ways,
> - finally, give the remaining 13 cards to the fourth player: ${}^{13}C_{13} = 1$

> way.
>
> So, by multiplication principle, the total number of ways to perform the distribution is
>
> $$^{52}C_{13} \times ^{39}C_{13} \times ^{26}C_{13} = \frac{52!}{39!13!} \times \frac{39!}{26!13!} \times \frac{26!}{13!13!} = \frac{52!}{13!13!13!13!}.$$

দ্বিতীয় অংকের ক্ষেত্রে খালি চারটে group বা দল বানাতে বলেছে, কোন দল আগে কোন দল পরে তা নিয়ে কোনো মাথা ব্যথা নেই। যেমন আমাদের 9 তাস আর 3 খেলোয়াড়ের উদাহরণে এবার দ্বিতীয় আর তৃতীয় পদ্ধতিকে আলাদা করে গুণব না।

> 2) Here we do not take the order into account, so if we count as above, then we shall overcount every possibility exactly $4!$ times. So, by the division principle, the answer here is
>
> $$\frac{52!}{13!13!13!13!4!}.$$

তৃতীয় অংকটা একটু কঠিন, যদিও শুরুটা দ্বিতীয়টার মতই, প্রথমে ধরে নেব যেন খেলোয়াড়রা সবাই distinct. ফলে overcounting হবে, সেটাকে division principle দিয়ে ঘায়েল করব। ঠিক কত দিয়ে ভাগটা করতে হবে সেটাই এক্ষেত্রে নতুন।

> 3) First we label the sets as A_1, A_2, A_3 and A_4, where A_1, A_2, A_3 are each of size 17, and A_4 has size 1. Then the distribution can be done as follows.
>
> - First, pick 17 cards from the 52 cards for A_1 : $^{52}C_{17}$ ways,
> - Then, pick 17 cards from the remaining $52 - 17 = 35$ cards for A_2 : $^{35}C_{17}$ ways,
> - Next, pick 17 cards from the remaining $35 - 17 = 18$ cards for A_3 : $^{18}C_{17}$ ways,
> - Finally, put the remaining card in A_4. : 1 way.
>
> So, by the multiplication principle, the total number of of constructing these labelled sets is
>
> $$\frac{52!}{17!17!17!}.$$

এই বার division principle লাগাতে হবে।

> However, the sets are not labelled like this. The only way to distinguish among the 4 sets is by their sizes. So the sets A_1, A_2, A_3 are indistinguishable. Hence we are overcounting each case exactly $3!$ times.

এই জায়গাটাই মোক্ষম। ভালো করে হজম করে নাও।

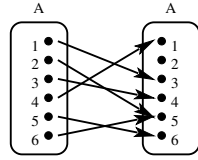



Fig 16

So, by the division principle, the answer is

$$\frac{52!}{17!17!17!3!}.$$

■

Example 22: Let A be the set $\{1, 2, ..., 6\}$. How many functions f from A to A are there such that the range of f has exactly 5 elements?

(A) 240 (B) 720 (C) 1800 (D) 10800

(BStat2011.10)

SOLUTION: কি চাইছে বোঝা যাক। একটা function-কে তীর চিহ্ন দিয়ে ভাবা যায় সে তো আগেই বলেছি। এই অংকের function-গুলোর একটা নিদর্শন রয়েছে Fig 16-এ। লক্ষ কর যে তীর পৌঁছেছে ঠিক পাঁচটা জায়গায়, একটা জায়গা ফাঁকা আছে। যে যে বিন্দুতে তীর পৌঁছয় তাদের set-টাকে বলে range. সেই জন্যই এখানে বলেছে যে "range of f has exactly 5 elements." যেহেতু তীর আছে 6-টা অথচ যাবার জায়গা মোটে 5-টা, তাই বুঝতেই পারছ যে কোনো একটা জায়গায় ঠিক দুটো তীর পৌঁছতে বাধ্য। এইটুকু বুঝে গেলে এবার নীচের ধাপগুলো সহজেই বুঝবে। প্রথমে ঠিক করব কোনখানে তীর পাঠাব না--

- Pick the number to avoid: 6 ways.

তারপর ঠিক করব কোথায় দুটো তীর পাঠাব--

- Pick the number to repeat: 5 ways.

তারপর দেখব কোন দুটো তীর সেখানে যাবে--

- Pick $i \neq j$ such that $f(i) = f(j)$: ${}^6C_2 = 15$ ways.

তারপর বাকি চারটে তীর বাকি চার জায়গায় পাঠিয়ে দেব।

- Permute the other four: $4! = 24$ ways.

So the required answer is $6 \times 5 \times 15 \times 24 = 10800$.

■

Exercise 30: এক জন ছাত্র উপরের অংকটা এইভাবে ভাবছে--

> *প্রথমে ঠিক করি কোথায় তীর পাঠাব না (6-ভাবে), তারপর 1-থেকে বেরোনো তীরটাকে বাকি পাঁচটা জায়গার কোথাও পাঠাই (5-ভাবে)। তারপর 2 থেকে বেরোনো তীরটা কোথায় যাবে ভাবি (সেটাও 5-ভাবে)। এইভাবে সবগুলোতীরই 5-রকম জায়গায় যেতে পারে। সুতরাং উত্তর হচ্ছে 6×5^6.*

ভুলটা কোথায়? ■

8.2 Binomial theorem

এবার আমরা binomial theorem বলে একটা জিনিস শিখব, যেটা খুবই কাজের জিনিস। ছোটোবেলায় আমরা শিখে থাকি (বা, অন্ততঃ মুখস্থ করে থাকি) যে--

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

ঠিক একই রকম ফর্মুলা বানানো যায় $(a+b)^4$ বা $(a+b)^5$ ইত্যাদি যে কোনো $(a+b)^n$ নিয়েই (যেখানে n হল যা ইচ্ছে একটা positive integer). এই ফর্মুলাটা বেশ সহজ, এবং একবার শিখে গেলেই তুমি তরতর করে $(a+b)^{37}$-কেও বড় করে লিখলে কি হবে সেটা লিখে দিতে পারবে! কায়দাটা বোঝার জন্য প্রথমে $(a+b)^3$ নিয়ে কাজ করি। এটা 3 খানা $(a+b)$ গুণ করে তৈরী। জিনিসটাকে বড় করে লিখি--

$$\begin{aligned}& (a+b)\times(a+b)\times(a+b)\\ =\ & (aa+ab+ab+bb)(a+b)\\ =\ & aaa+aab+aab+bba+aab+abb+abb+bbb\end{aligned}$$

দেখতেই পাচ্ছ যে প্রত্যেকটা term-ই হল কিছু a আর কিছু b-এর গুণফল। অবশ্য এমন হতেই পারে যে a হয়তো আদৌ রইল না, বা b রইল না, যেমন a^3-এ কোনো b নেই। লক্ষ কর যে প্রতিটা term-এই a আর b-এর মোট সংখ্যা হল 3. সেটাই স্বাভাবিক, কারণ আমাদের কাছে তিনটে $(a+b)$ ছিল, তার প্রত্যেকেই হয় একটা a নয়তো একটা b সরবরাহ করেছে। সুতরাং চট্ করে দেখি মোট কতগুলো a^2b থাকবে। তার মানে এখানে দুটো $(a+b)$ থেকে a এসেছে, আর অবশিষ্টটা থেকে b. আমাদের কাছে তিনটে $(a+b)$ ছিল, যাদেরকে তিনটে আলাদা রঙে দেখিয়েছিলাম। তার থেকে কতভাবে দুজন a-সরবরাহকারীকে নেওয়া যায়? উত্তর হল ${}^3C_2 = 3$. সুতরাং ঠিক 3-খানা a^2b থাকতে বাধ্য। এবং সত্যিই লক্ষ কর আমরা ঠিক তাইই পেয়েছি--aab, aab আর aab. একইভাবে ab^2-ও তিনটে আছে, কারণ তিনটে $(a+b)$-এর মধ্য থেকে একটা a-সরবরাহকারী নির্বাচন করা যায় ${}^3C_1 = 3$ ভাবে।
একই যুক্তি খাটবে যেকোনো $(a+b)^n$-এর জন্যই। এখানে প্রত্যেকটা term-এই একটা করে a^ib^j থাকবে যেখানে a আর b-র মোট সংখ্যা হবে n, অর্থাৎ $i+j=n$ হবে। সুতরাং a^ib^j না লিখে a^ib^{n-i} লিখতে পারি। এই জিনিসটা কতবার আসবে? উত্তর হল--n-খানা $(a+b)$-এর থেকে i-খানা a-সরবরাহকারী যতভাবে নির্বাচন করা যায়, মানে ${}^nC_i$. অতএব পেয়ে গেলাম--

Binomial theorem

For any positive integer n and any two numbers a, b we have

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} {}^nC_i a^i b^{n-i}.$$

এখানে a, b যা খুশি সংখ্যা হতে পারে, positive, negative, শূন্য, fraction, $\sqrt{2}$, π, যা ইচ্ছে। এমনকি complex number হলেও আপত্তি নেই! তবে এই বইতে আমরা সাধারণতঃ a, b জায়গায় 1 আর -1 বসাব।
যদি $a = b = 1$ বসাই তবে পাব

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} {}^nC_i.$$

যদি $a = -1$ আর $b = 1$ বসাই তবে

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \; {}^nC_i.$$

সুতরাং যদি যে কোনো n নাও আর যাবতীয় $r = 0, 1, ..., n$-এর জন্য ${}^nC_r$ বার করে যোগ কর, তবে পাবে 2^n. আর যদি even আর odd r-গুলোর জন্য আলাদা করে যোগ কর তবে দুটো যোগফলই সমান আসবে। সুতরাং এরা প্রত্যেকেই 2^n-এর অর্ধেক, মানে 2^{n-1} হতে বাধ্য।

Example 23: From a bag containing 10 distinct objects, the number of ways one can select an odd number of objects is

(A) 2^{10} (B) 2^9 (C) 10! (D) 5

(BMath2010.25)

SOLUTION:

> The number of ways to select k objects from 10 ditinct obects is ${}^{10}C_k$.
> We need ${}^{10}C_1 + {}^{10}C_3 + \cdots + {}^{10}C_9$.
> Now we know that
>
> $$(1+1)^{10} = {}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 + \cdots + {}^{10}C_{10},$$
>
> and
>
> $$(1-1)^{10} = {}^{10}C_0 - {}^{10}C_1 + - \cdots + {}^{10}C_{10}.$$
>
> Subtracting, $2^{10} = 2\left({}^{10}C_1 + {}^{10}C_3 + \cdots + {}^{10}C_9\right)$.
> So the required answer is 2^9.

■

Exercise 31: From a bag containing 20 distinct objects, the number of ways one can select an even number of objects is

(A) 2^{20} (B) 2^{19} (C) 20! (D) 10

■

Exercise 32: There are 10 men and 20 women in a room. Find the number of committees that can be formed consisting of an even number (possibly zero) of men and odd number of women. ■

Exercise 33: A room contains 10 men and 5 women. Find the number of committees that can be formed using them such that the sum of the number of men and the number of women

in the committee is even. ■

8.3 Manipulation

Example 24: If ${}^nC_{r-1} = 36$, ${}^nC_r = 84$ and ${}^nC_{r+1} = 126$, then find the values of n and r. **(IIT,1979)**

Solution:

> $\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{84}{36}$, or $\frac{n-r+1}{r} = \frac{7}{3}$. So $\frac{n+1}{r} = \frac{10}{3}$.
> Similarly, $\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{126}{84}$, or $\frac{n-r}{r+1} = \frac{3}{2}$. So $\frac{n+1}{r+1} = \frac{5}{2}$, or $\frac{r+1}{r} = \frac{10}{3}/\frac{5}{2} = \frac{4}{3}$.
> $\therefore r = 3$ and $n+1 = \frac{10}{3} \times r = 10$.

■

নীচের অংক দুটো মজাদার। ঠিক কায়দাটা জানলে খুবই সোজা, নইলে মাথায় গোল বেঁধে যাবে।

Example 25: True/false: The product of any r consecutive natural numbers is always divisible by $r!$. **(IIT,1985)**

Solution:

> Let the r consecutive natural numbers be $m, m+1, ..., m+r-1$.
> Let $n = m - r + 1$.
> Then their product is $n(n-1)\cdots(n-r+1)$.
> We know that ${}^nC_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ is an integer.
> So $r!$ divides the product.

■

Example 26: Using permutation or otherwise, prove that

$$\frac{n^2!}{(n!)^n}$$

is an integer, where n is a positive integer. **(IIT,2004)**

Solution:

> $$\begin{aligned} n^2! &= (1 \times \cdots \times n) \times (n+1 \times \cdots \times 2n) \times \cdots \times ((n-1)n+1 \times \cdots \times n^2) \\ &= N_1 \times \cdots N_n, \end{aligned}$$

Fig 17

where for $k = 1, ..., n$, we define

$$N_k = ((k-1)n+1) \times \cdots \times kn.$$

Then

$$\frac{N_k}{n!} =^{kn} C_n,$$

which is a positive integer.

So

$$\frac{n^2!}{(n!)^n} = N_1 \times \cdots \times N_n$$

is also a positive integer.

■

এবারে তোমার জন্য একটা অংক দিই।

Exercise 34: একটা set-এ n-খানা element আছে। ধরো এর proper subset-দের (মানে ϕ এবং পুরো set-টা নিজে বাদে বাকি subset-দের) সংখ্যা 3 দিয়ে ভাগ যায়। দেখাও যে n অবশ্যই একটা odd (বিজোড়) সংখ্যা হতে বাধ্য। ■

Exercise 35: একটা 8×8 দাবার বোর্ডের বাঁদিকের নীচের কোনার ঘরে একটা পিঁপড়ে বসে আছে। Fig 17-এ একটা ফুটকি দিয়ে দেখিয়েছি। সেটা প্রতি পদক্ষেপে একঘর যায়, হয় ডানদিকে নয়তো উপর দিকে। ও কতভাবে ডানদিকের উপরের কোনার পতাকাটায় যেতে পারে? বোঝার সুবিধার জন্য একটা পথ দেখিয়েছি ছবিতে। প্রশ্ন হল এরকম কতগুলো পথ সম্ভব? ■

8.4 Pascal's triangle

THEOREM

For any two positive integer n and for any $r \in \{1, ..., n\}$ we have

$$^nC_{r-1} +^n C_r = {}^{n+1}C_r.$$

Fig 18 **Fig 19**

Proof: এইটা নানাভাবে প্রমাণ করা যায়। একটা কায়দা অবশ্যই সরাসরি সংজ্ঞা লাগানো। বাঁদিকে আছে

$$
\begin{aligned}
{}^nC_{r-1} + {}^nC_r &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r+1)!}[r + (n-r+1)] \\
&= \frac{n!}{r!(n-r+1)!}(n+1) \\
&= \frac{n!}{r!(n-r+1)!}(n+1) = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = {}^{n+1}C_r,
\end{aligned}
$$

ঠিক যেমনটা দরকার ছিল। **[Q.E.D]**

এই কায়দায় প্রমাণটা হল ঠিকই কিন্তু এটা বোঝা গেল না যে এমনটা কেন হচ্ছে। সেটা একটা গল্প দিয়ে বোঝা যায়। মনে কর একটা ক্লাসে 11 জন ছাত্র আছে, তাদের মধ্যে একজন আসে নি। মানে ক্লাসে আপাততঃ 10 জন ছাত্র আছে। এদের মধ্যে থেকে 4 জনের একটা দল বানাতে হবে। কতভাবে করা যায়? উত্তর তো জানিই, ${}^{10}C_4$ ভাবে। সবে এই অব্দি হিসেব করা হয়েছে, এমন সময়ে সেই এগারো নম্বর ছাত্র ছুটতে ছুটতে এসে হাজির। সুতরাং এখন দলের সংখ্যা আরো বাড়বে। ঠিক কত বাড়বে? সেটা এইভাবে দেখা যায়। বাকি 10 জনকে নিয়ে যে দলগুলো করা যাচ্ছিল, সেগুলো তো রইলই, নতুন সংযোজন হল নতুন ছাত্রটাকে নিয়ে যে সব দল করা যায়। এই সব দলে নতুন ছাত্রটা তো থাকছেই, আর অবশিষ্ট 3 জন আসছে সেই আগের 10 থেকে। ওদের নির্বাচন করা যায় ${}^{10}C_3$ ভাবে। তার মানে নতুন দলের সংখ্যা ${}^{10}C_3$. অতএব ${}^{10}C_3 +^{10} C_4 = {}^{11}C_4$. এবার খালি 10-এর জায়গায় n এবং 4-এর জায়গায় r কল্পনা করলেই theorem-টা পেয়ে যাবে।
এই theorem-টা বার বার করে ব্যবহার করলে যাবতীয় ${}^nC_r$-দের একটা ত্রিভুজের মত সাজিয়ে লেখা যায়, যেমন দেখিয়েছি Fig 18-এ। এর n নম্বর লাইনে ${}^nC_0$ থেকে শুরু করে ${}^nC_n$ অব্দি লেখা। প্রতিটা সংখ্যাকে পাওয়া যায় তার মাথার উপরের দুটো সংখ্যাকে যোগ করলে। যদি ${}^nC_r$-এর জায়গায় সংখ্যা বসাও তবে পাবে Fig 19-এর মত একটা জিনিস। লাল তীর চিহ্ন দিয়ে দেখিয়েছি 3-টা কিভাবে মাথার উপরের 1 আর 2 যোগ হয়ে তৈরী হয়েছে।

Example 27: The value of the expression ${}^{47}C_4+\sum_{j=1}^{5} {}^{52-j}C_3$ is equal to (A) ${}^{47}C_5$ (B) ${}^{52}C$

(IIT,1980)

SOLUTION:

We know that

$$ {}^nC_{r-1} +^n C_r =^{n+1} C_r. $$

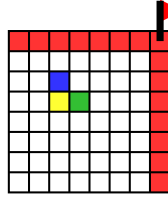



Fig 20

Using this repeatedly we get

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{{}^{47}C_4 + {}^{47}C_3}_{{}^{48}C_4} + {}^{48}C_3}_{{}^{49}C_4} + {}^{49}C_3}_{{}^{50}C_4} + {}^{50}C_3}_{{}^{51}C_4} + {}^{51}C_3}_{{}^{52}C_4} + {}^{52}C_3}_{{}^{53}C_4}.$$

So the answer is ${}^{53}C_4$, which is not listed.

■

এবার একটা মজার অংক দেব, দুই ভাগে ভেঙে।

Exercise 36: দাবার বোর্ডে পিঁপড়ের অংকটা মনে আছে? যে পিঁপড়েটা প্রতি পদক্ষেপে এক ঘর ডাইনে বা উপরে যেতে পারে? দাবার বোর্ডটা আবার এঁকেছি Fig 20-এ। যদি পিঁপড়েটা লাল ঘরগুলোর একটা থেকে যাত্রা শুরু করে তবে কতরকম পথে পতাকায় পৌঁছতে পারবে? এবার ধরো বলে দিলাম যে সবুজ ঘরটা থেকে a রকম পথে আর নীল ঘরটা থেকে b রকম পথে পতাকায় পৌঁছতে পারে। খালি এটুকু থেকেই বলতে পারো হলুদ ঘরটা থেকে কতভাবে পতাকায় পৌঁছোনো যাবে? ■

এই অংকটা করার পরে নীচের অংকটা করো।

Exercise 37: বড় করে দাবার বোর্ডটা এঁকে নাও। প্রত্যেকটা ঘরে একটা সংখ্যা লেখো, সেই ঘর থেকে শুরু করে কতরকম পথে পতাকায় পৌঁছনো যায় সেই সংখ্যাটা। আগের অংকে সবুজ, নীলের সংখ্যা থেকে যেভাবে হলুদের সংখ্যা বার করেছিলে সেটা বারবার কাজে লাগবে। এর মধ্যে Pascal's triangle-টা দেখতে পাচ্ছো? ■

Answers

1. (i) 30, (ii) 7. **2.** প্রথমটা, কারণ দ্বিতীয় $= \frac{31}{101}\times$ প্রথম। **3.** একেবারে অন্য প্রান্তে গিয়ে সমস্যা হবে। যদি সেই বিশেষ ভদ্রলোক তখনও দাঁড়িয়ে থাকেন, তবে তিনি আর বসতে পাবেন না! **4.** $2\times 30!\times 20!$. প্রথমের 2-টা এল, কারণ মেয়ে দিয়ে শুরু করবে নাকি ছেলে দিয়ে, সেটা 2-ভাবে স্থির করা যায়। **5.** $4! = 24$. **6.** $9!$. **7.** ${}^{50}P_3$. **8.** এক ঘন্টা। **9.** $8!\times 3!$. **10.** $2\times 3!\times 7!$. **11.** $10! - 2\times 3!\times 7!$. **12.** $10!\times {}^{11}P_4$. **13.** অসম্ভব, মোটে 4 জন পুরুষ 10 জন মহিলাকে আলাদা রাখতে পারবে না! **14.** (i) $5\times 4\times 8!$, (ii) $7!\times {}^{8}P_3$, (iii) $3!\times 2!\times 3!\times 5!$. **15.** ${}^{8}P_7$. **16.** ${}^{4}P_3$. **17.** $3! + 2\times 3\times 3! = 42$. **18.** আগের অংকের summation-এর প্যাঁচটা লাগাও। **19.** ${}^{10}C_5$. **20.** $a = {}^{7}C_5, b = {}^{6}C_3, c = {}^{7}C_5\times {}^{6}C_3$. **21.** ${}^{10}C_2\times 8\times 5 + 10\times {}^{8}C_2\times 5 + 10\times 8\times {}^{5}C_2$. **22.** ${}^{4}C_2 = 6$. **23.** $a = 12 - 8 = 4,\ b = 5,\ c = {}^{9+8}C_{12} = {}^{17}C_{12},\ d = {}^{8}C_4,\ e = {}^{8}C_8 = 1,$

$f = {}^9C_4 \times 1 = {}^9C_4,\ g = {}^{17}C_{12} - {}^9C_4 = 6062,\ h = {}^9C_5,\ i = {}^8C_7,\ j = {}^9C_5 \times {}^8C_7,\ k = {}^9C_6,\ \ell = {}^8C_6,$ $m = {}^9C_6 \times {}^8C_6,\ n = 6062 - {}^9C_5 \times {}^8C_7 - {}^9C_6 \times {}^8C_6 = 2702.$ **24.** দুটো ভুল--এক, set-এর element-রা unordered হয়, সুতরাং প্রথম সংখ্যা, দ্বিতীয় সংখ্যা এভাবে বলা যাবে না। দুই, যেসব ক্ষেত্রে দুটো সংখ্যা আসবে S_2-র থেক সেগুলো একাধিকবার গোণা হয়ে যাচ্ছে। **25.** $3 \times ({}^{17}C_2 - {}^{10}C_2)$.
26. $a = {}^nC_3, b = n, c = n-3, d = n, e = 1, f = n({}^nC_3 - 1)$. **27.** 5. **28.** $a = n$, $b = {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2},\ c = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2},\ d = 0,\ e = 5,\ f = 5.$ **29.** $p = {}^6C_2 = 15,\ q = {}^4C_2 = 6,$ $r = {}^2C_2 = 1,\ s = 1,\ t = 15 \times 6 \times 1 \times 1 = 90.$ **30.** ও ধরেছে যে range-এর সাইজ হল ≤ 5. কিন্তু প্রশ্নে বলাছিল exactly 5. **31.** 2^{19}. **32.** 2^{9+19}. **33.** $2 \times 2^{9+4}$. **34.** $2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$ বলা আছে 3 বিয়ে ভাগ যায়, মানে $(2^{n-1} - 1)$ অবশ্যই 3 দিয়ে ভাগ যায়। তাই $n - 1$ হল জোড় (কেন?), মানে n বিজোড়। **35.** ${}^{14}C_7$, ঠিক 14-টা পদক্ষেপ লাগবে, তার মধ্যে যেকোনো 7-টাকে হতে হবে উপর দিকে, বাকিগুলো ডানদিকে। **36.** যেকোনো লাল

1	1	1	1	1
	4	3	2	1
		6	3	1
			4	1
				1

ঘর থেকেই 1-ভাবে। $a + b$, এখানে addition principle লাগালাম। **37.**

Chapter III
আরো প্যাটার্ণ

DAY 9
Distinct নিয়ে আরও অংক

9.1 Distinct, some order, no repetition

এবার কি করব সেটা Fig 1, Fig 2 আর Fig 3 দেখলেই মনে পড়ে যাবে। চারটে বিভিন্ন রঙের পুঁতি দিয়ে মালা গাঁথা হচ্ছে। তিনটে ছবিতে পুঁতিগুলোকে বিভিন্ন order-এর সুঁচে পরানো হয়েছে, অথচ মালাটা গাঁথা হয়ে যাওয়ার পর প্রথম দুটো মালা আসলে একই দাঁড়িয়েছে! এক লাইনে সাজালে যে সব order আলাদা ছিল, মালার গঠনের দৌলতে তাদের কেউ কেউ এক হয়ে গেল। এরকম ক্ষেত্রে কি করে হিসেব রাখতে হয় সেটাই আজকে শিখব।
আমরা combination-এর অংকে যেভাবে multiplication principle এবং division principle ব্যবহার করলাম সেটা একটু কায়দা করে এখানেও লাগানো যাবে। সেটা বোঝার জন্য প্রথমে একটা পরিচিত combination-এর অংকের সমাধানই একটু অন্যভাবে লিখি।

Example 1: ক্লাসে 5 জন ছাত্র আছে। তাদের থেকে 3 জনের একটা দল কতভাবে গঠন করা যাবে?

SOLUTION: উত্তরটা তো জানিই, ${}^5C_3$. আমরা এটাকে দেখেছিলাম এইভাবে--প্রথমে পরপর 3 জনকে নিয়েছিলাম, সেটা করা গিয়েছিল $5\times 4\times 3$ ভাবে। এবার 3 জনকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় 3!-ভাবে। তাই division principle দিয়ে উত্তর পেয়েছিলাম $\frac{5\times4\times3}{3!}$.
এই যে বললাম "নিজেদের মধ্যে সাজানো", এইটাকে একটু খুঁটিয়ে দেখি। মনে কর যেন তিনটে নির্বাচিত ছাত্রকে তিনটে চেয়ারে বসানো হবে। প্রথমে ধরে নাওয়ে চেয়ারগুলোতে সংখ্যা দেওয়া আছে $1, 2, 3$. সেক্ষেত্রে চেয়ারগুলোকে $5\times 4\times 3$ ভাবে পূর্ণ করা যাবে। কিন্তু আসলে তো চেয়ারগুলোতে কোনো সংখ্যা নেই! সেইটা হিসেবে নেওয়ার জন্য দেখব চেয়ারগুলোকে কতভাবে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায়। তার উত্তর হল 3!, যেটা দিয়ে ভাগ করেছি। ■

যদি n-জন ছাত্র আর r-খানা চেয়ার থাকত, তাহলেও একইভাবে ভাবা যেত-- r-খানা চেয়ার মিলে যেন একটা কাঠামো। তার মধ্যে ছাত্রদের বসাতে হবে। দুইধাপে করব। প্রথমে কাঠামোর যেখানে যেখানে ছাত্র বসবে (মানে চেয়ারগুলোকে) সেগুলোকে

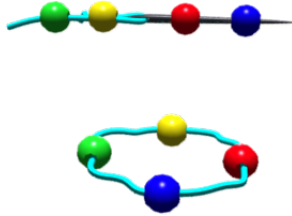
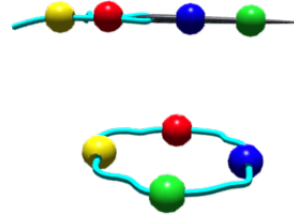
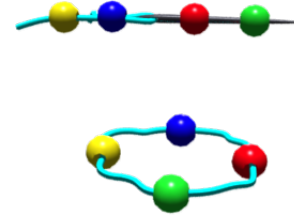



Fig 4 **Fig 5** **Fig 6**

সংখ্যা দিয়ে চিহ্নিত করে নেব। এইবার দেখব কতভাবে ছাত্রদের বসানো যায়। এর উত্তর হল $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$. দ্বিতীয় ধাপে আমরা খালি কাঠামোটাকে নিয়ে কাজ করব। কাঠামোটাকে কতভাবে ঘুরিয়ে আবার নিজের সঙ্গে ফিট করা যায়, সেই সংখ্যাটা বার করব। এখানে উত্তর পাব $r!$. এবার প্রথম ধাপের সংখ্যাটাকে দ্বিতীয় ধাপের সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে দিলেই উত্তর পেয়ে যাব। তার মানে সব মিলিয়ে উত্তর দাঁড়াল--

$$\frac{{}^nP_r}{\text{কাঠামোটাকে যতভাবে নিজের সঙ্গে ফিট্ করা যায়}}$$

এই বর্ণনাটা হয়তো অদ্ভুত লাগছে, কিন্তু কয়েকটা উদাহরণ দেখলেই এর উপযোগিতা বুঝবে।

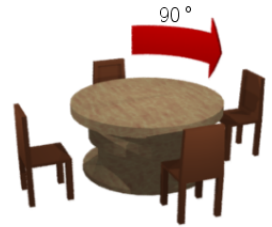
Example 2: ধরো একটা গোল টেবিল ঘিরে চারটে চেয়ার আছে। Fig 4 দ্যাখো। চারটে লোক এই টেবিলে কতভাবে বসতে পারে?

SOLUTION: এখানে গোল টেবিল ব্যাপারটা বুঝে নেওয়া যাক। ছবিটা দেখলেই বুঝবে যে টেবিলটা সব দিক দিয়েই সমান, এবং চেয়ারগুলোও সব একই রকম দেখতে, সমান সমান দূরত্বে বসানো। ওদের মধ্যে কোনো ভেদাভেদ নেই, কোনো উত্তর-দক্ষিণ-পূর্ব-পশ্চিম কিচ্ছু নেই। "আমাদের মুখোমুখি চেয়ারটা" বা "বাঁদিকের চেয়ারটা" ইত্যাদি বলেও ওদেরকে আলাদা করা যাবে না। যেমন ধরো Fig 5 আর Fig 4-এর মধ্যে কোনো পার্থক্য নেই, খালি অন্য দিক থেকে দেখা হচ্ছে এই যা। এই কথাটা ভালো করে বুঝে নাও। Fig 5-এ লাল লোকটার বাঁদিকে নীল লোকটা, তার বাঁদিকে সবুজ, এবং তার বাঁদিকে হলুদ বসেছে। ঠিক সেই ক্রমটাই রয়েছে Fig 6-এও। কিন্তু Fig 7-এর ক্ষেত্রে বসাটা অন্যরকম। এখানে নীল চলে গেছে লালের ডানদিকে। এবার একটা ছোট্টো ধাঁধা দিই।

Exercise 1: Fig 8 দ্যাখো। এখানে বসাটা কি Fig 5 বা Fig 6-এর মত? নাকি Fig 7-এর মত? নাকি দুটোর কোনোটার মতই নয়? ■

এতক্ষণ গোল টেবিলের মাহাত্ম্য আলোচনা করা গেল। এবার অংকটায় ফিরে আসি। আমাদের কায়দাটা একইভাবে খাটবে--

$$\frac{{}^nP_r}{\text{কাঠামোটাকে যতভাবে নিজের সঙ্গে ফিট্ করা যায়}}$$

Fig 7 **Fig 8** **Fig 9**

এখানে $n = 4$ এবং $r = 4$. তাই ${}^{n}P_r = 4!$. কাঠামোটা হল গোল টেবিলটা যার চার দিকে সমান সমান ভাবে চারটে চেয়ার লাগানো আছে। এইটাকে মোট 4-ভাবে একই জায়গায় ফিট্ করে বসানো যায়। কি করে বুঝলে তো? যদি Fig 9-এর মত $90°$ ঘোরাও, তবে প্রত্যেকটা চেয়ার তার বাঁদিকের চেয়ারের জায়গাটা দখল করবে। যেহেতু চেয়ারগুলো সবই একইরকম তাই কোনো পার্থক্য বোঝা যাবে না। $360°$ ঘোরালে প্রতিটা চেয়ার ফের স্বস্থানে ফিরে আসবে। যেহেতু $360°/90° = 4$, তাই 4 বার এরকম $90°$ করে ঘোরানো সম্ভব। সুতরাং ভাগ করব 4 দিয়ে। অতএব উত্তর হবে $\frac{4!}{4} = 3!$. ■

ঠাণ্ডা মাথায় পুরো বর্ণনাটা পড়ে দ্যাখো, বুঝলে কিনা। যদি বলতাম গোল টেবিলটা ঘিরে দশটা চেয়ার আছে, তবেও ঠিক একইভাবে উত্তর হত $10!/10 = 9!$. সুতরাং যদি n-খানা চেয়ার থাকত তবে উত্তর হত $n!/n = (n-1)!$.
অনেক ছাত্র অংকটার কায়দাটা মনে না রেখে খালি মুখস্থ করে রাখে--"গোল টেবিলের অংকে উত্তর হয় $(n-1)!$" সেটা বুদ্ধিমানের কাজ নয়। তাতে খালি গোল টেবিলের অংকই করা যাবে, টেবিলটা গোল না হলে তোমার মাথাতেই গোল বেঁধে যাবে! যেটা মনে রাখবে সেটা হল

$$\frac{\text{এক লাইনে কতভাবে সাজানো যেত}}{\text{কাঠামোটাকে যতভাবে নিজের সঙ্গে ফিট্ করা যায়}}$$

Example 3: এবার টেবিলটা নিলাম rectangular, মানে যেরকম টেবিল আমরা সাধারণতঃ দেখে অভ্যস্ত। এর দৈর্ঘ্য বরাবর দুপাশে দুটো করে চেয়ার পাতা, আর প্রস্থ বরাবর দুপাশে একটা করে চেয়ার। মানে মোট 6-টা চেয়ার যেমন Fig 10-এ দেখিয়েছি। তোমার কাছে 10 জন লোক আছে। এদের মধ্যে 6 জনকে কতভাবে বসানো যাবে? এখানেও ধরা হচ্ছে যে চেয়ারগুলো সব একইরকম, উত্তর-দক্ষিণ-পূর্ব-পশ্চিম এসব কিচ্ছু নেই। আর rectangle যখন, তাই দৈর্ঘ্য বরাবর পাশ দুটো একইরকম, প্রস্থ বরাবর পাশ দুটোও নিজেদের মধ্যে একইরকম।

SOLUTION: প্রথমে যথারীতি কল্পনা করে নেব যেন চেয়ারগুলোর গায় সংখ্যা লেখা আছে। তাহলে 1 নম্বর চেয়ার, 2 নম্বর চেয়ার এইভাবে বলা যাবে। 1 নম্বরের জন্য লোক পাওয়া যাবে 10 ভাবে, 2 নম্বরের জন্য $10 - 1 = 9$ ভাবে ইত্যাদি। মানে সবগুলো চেয়ারকে পূর্ণ করা যাবে ${}^{10}P_6$ ভাবে।
এইবার দেখি কাঠামোটাকে কতভাবে ঘুরিয়ে নিজের সঙ্গে ফিট করা যায়। একটু ভাবলেই দেখবে যে কাজটা খালি দুভাবে করা যায়, $0°$ ঘুরিয়ে (মানে কিছু না করে) আর $180°$ ঘুরিয়ে (যাতে এইদিকের লম্বা পাশটা ওদিকে লম্বা পাশের জায়গায় চলে যায়)। সুতরাং উত্তর হল

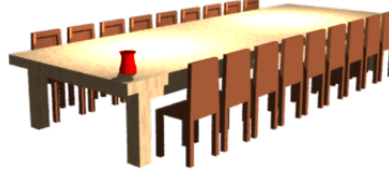
$$\frac{{}^{10}P_6}{2}.$$

■

এই টেবিলটার সাথে গত অধ্যায় থেকে তুলে আনা Fig 11-এর টেবিলটার তুলনা করে দেখতে পারো। সেখানে প্রশ্নে একটা "particular side"-এর কথা বলা ছিল। তাই আমরা একটা ফুলদানী এঁকে বুঝিয়েছিলাম যে সেখানে টেবিলটাকে ঘোরালে ব্যাপারটা আলাদা হয়ে যাবে। এখানে সে সমস্যা নেই।

Example 4: In how many ways can 6 men sit around an equilateral triangular table, if exactly

Fig 10

Fig 11

two men sit along each side?
SOLUTION: এখানে $n = r = 6$. সুতরাং ${}^nP_r = 6!$. কাঠামোটা হল সমবাহু ত্রিভুজাকার টেবিলটা। সেটাকে 3-ভাবে ঘুরিয়ে ফিট করে বসানো যায়। সুতরাং উত্তর হবে $6!/3 = 240$. ■

Exercise 2: In how many ways can 9 men sit around an equilateral triangular table , if exactly three men sit along each side? ■

Exercise 3: In how many ways can 5 men stand in a ring? ■

Exercise 4: In how many ways can you make a ring of 1 boy and 6 girls? ■

Example 5: In how many ways can 3 men and 5 women sit around a round table so that no two men are side by side?
SOLUTION:

> - First let the 5 women stand in a ring: $4!$ ways.
> - Then place the 3 men in the 5 gaps: ${}^5P_3$ ways.
>
> So, by multiplication principle, the answer is $4! \times {}^5P_3 = 1440$.

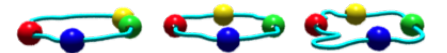
এখানে কয়েকটা জিনিস লক্ষণীয়--

- 5 জন মেয়ে দাঁড়াতে পারল 4!-ভাবে (5!-ভাবে নয়), কারণ ওরা গোল করে দাঁড়াচ্ছে।
- 5-জন মেয়ের মধ্যে ফাঁকের সংখ্যা কিন্তু 6 না হয়ে 5 হয়েছে, কারণ সেই গোল করে দাঁড়ানো। Fig 12-এ প্রতিটা ফাঁকে একটা কাঠের গোল পিঁড়ি রেখেছি, ছেলের দাঁড়ানোর জন্য।
- 5-টা ফাঁক এখানে distinct, যেহেতু ওদেরকে "মৌমিতার বাঁদিকের ফাঁক", "ইভা আর ইলার মাঝখানের ফাঁক" ইত্যাদি বলে আলাদা করা যাবে।

■

Fig 12

Fig 13

Fig 14

Exercise 5: In how many ways can 4 men and 6 women sit around a round table so that no two men are side by side? ■

এইবারে সামান্য অন্য ধরণের একটা অংক দেখি।

Example 6: In how many ways can you make a garland using 4 different beads?

SOLUTION: এখানে কাঠামোটা হল একটা মালা, আর যে জিনিসগুলোকে সাজাচ্ছি সেগুলো হল চারটে বিভিন্ন পুঁতি। এখানেও মূল কায়দা একই--প্রথমে কাঠামোর কথা ভুলে গিয়ে দেখব পুঁতিগুলোকে এক লাইনে সাজাতে হলে কতভাবে সাজানো যেত। তার উত্তর হল $4!$. তারপর দেখব কাঠামোটা নিজের সঙ্গে নিজে কতভাবে ফিট্ করে বসানো যায়। এই কাজটা করার সময়ে মালাটাকে একটা circle বলে ভাবলে সুবিধা হবে, যার গায় পুঁতিগুলো সমান সমান অন্তরে গাঁথা আছে, যেমন দেখিয়েছি Fig 13-এ। বাস্তবের মালা অবশ্য মোটেই নিখুঁত circle হয় না, আর পুঁতিগুলোও সাধারণতঃ একটু ঢিলে থাকে, তাই সমান সমান অন্তরে না থেকে এ ওর গায় গিয়ে পড়তে পারে। কিন্তু তার ফলে সেটা নতুন কোনো মালায় পরিণত হয় না। যেমন Fig 14-তে যে মালাগুলো দেখিয়েছি, তারা সবাই Fig 13-এরই রূপভেদ। কিন্তু আঁকাবাঁকা মালা নিয়ে চিন্তা করা কঠিন তাই আমরা Fig 14-এর মত বিভিন্ন জিনিস কল্পনা না করে তাদের প্রতিনিধিস্বরূপ Fig 13-এর মত একটা মালার কথাই ভাবব। এটা অনেকটা fraction লেখার মত-- $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{45}{90}$ এরা সবাই একই জিনিসের রূপভেদ, যে জিনিসটাকে নিয়ে অংক করার শুরুতেই কাটাকাটি করে $\frac{1}{2}$ বানিয়ে নিলে সুবিধা হয়। এই ধারণাটা অংকের জগতে বহুল-ব্যবহৃত--একই জিনিসের একগুচ্ছ রূপভেদ নিয়ে কাজ না করে, একটা বিশেষ রূপকে পুরো গুচ্ছটার প্রতিনিধি ধরে এগোনো।
এবার দেখি কাঠামোটাকে মানে Fig 13-এর মত মালাটাকে কতভাবে নিজের সঙ্গে ফিট্ করে বসানো যায়। চেয়ারের উদাহরণে যেমন $90°$ ঘুরিয়ে বসানো যাচ্ছিল এখানেও সেটা সম্ভব। এছাড়া এখানে আরও একটা কাজ করা যাবে--সেটা হল মালাটাকে উল্টে দেওয়া। তাহলে মোট কতভাবে মালাটাকে নিজের সঙ্গে ফিট্ করা যাচ্ছে? $4+1=5$ ভাবে? উঁহু, এখানে ঘোরানো এবং ওল্টানো পরস্পরের বিকল্প নয় যে হয় তুমি ঘোরাবে নয়তো ওল্টাবে। চাইলে তুমি দুটোই একইসঙ্গে করতে পারো। সুতরাং এখানে একবার multiplication principle লাগবে।

- কতটা ঘোরাবে ঠিক কর : 4 ভাবে করা যায় $(0°, 90°, 180°, 270°)$,
- ওল্টাবে কিনা ঠিক কর : 2 ভাবে করা যায় (সোজা, উল্টো)।

সুতরাং মোট 4×2-ভাবে মালাটাকে নিজের সঙ্গে নিজে ফিট্ করে বসানো যাবে। অতএব উত্তর হল $4!/(4 \times 2) = \frac{3!}{2} = 3$.
■

Exercise 6: যদি 5-টা বিভিন্ন পুঁতি দিয়ে মালা গাঁথা হত তবে উত্তরটা কি হত? ■

অনেক ছাত্রছাত্রীই যুক্তিটা মাথায় না রেখে খালি মুখস্থ করে রাখে যে n-খানা বিভিন্ন পুঁতি দিয়ে মোট $(n-1)!/2$-খানা আলাদা আলাদা মালা বানানো যায়। ফলে এই যুক্তিটাই যখন সামান্য ঘুরিয়ে দেওয়া হয় অমনি তারা মুস্কিলে পড়ে যায়, যেমন ধরো নীচের অংকটায়।

Exercise 7: In how many ways can the sides of a cube be painted with distinct colours? **(ISI)**
HINT:
একটা cube-এর 6-টা পাশ থাকে সে তো জানোই। সেগুলোকে "কতভাবে রং করা যায়?" মানে কি সেটা বুঝে নিই। আমরা কোনো ছয়টা রং নিয়ে শুরু করছি। প্রত্যেক পাশে একটা করে আলাদা রং দেব। দুভাবে রং করাকে একই বলব যদি cube-টাকে ঘুরিয়ে ঘুরিয়ে একটা থেকে অন্যটায় পৌঁছোনো যায়। যেমন Fig 15-এ দুটো রং করা cube দেখিয়েছি (পিছনে আর নীচে আয়না বসিয়ে দিয়েছি যাতে সবগুলো পাশই নজরে থাকে)। ভালো করে চিন্তা করে দ্যাখো যে আসলে এরা একই cube, খালি একটু ঘুরিয়ে রাখা হয়েছে এই যা। সেটা বোঝার জন্য কোনো একটা রং নিয়ে ভাবতে শুরু কর তার প্রতিবেশীরা কে কার পরে আসছে, দেখবে দু ক্ষেত্রেই একই উত্তর পাবে।
এবার তবে অংকটা করি। যদি 6-টা রঙকে পাশাপাশি সাজাতাম, সেটা করা যেত $6!$-ভাবে। একে ভাগ করতে হবে cube-টাকে কতভাবে নিজের সঙ্গে ফিট করে বসানো যায়। সেটা multiplication principle দিয়ে বার করা যাবে। একটু ধরিয়ে দিই--

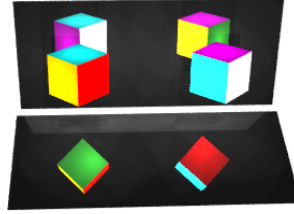



Fig 15

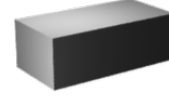



Fig 16

- প্রথমে স্থির কর কোন পাশটাকে নীচে রাখবে : $\boxed{a}$
- সেই পাশটাকে নীচে রেখে কতভাবে ঘুরিয়ে বসাতে পারো : $\boxed{b}$

এবার multiplication principle থেকে পাচ্ছি $\boxed{c}$

সুতরাং সব মিলিয়ে উত্তর হল $\boxed{d}$. ■

এই কায়দার উপর ভিত্তি করে আরও অনেক অংক বানানো যায়। যেমন নীচের অংকটা।

Exercise 8: একটা ইঁট আছে Fig 16-এর মত, যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা কেউ কারো সমান নয়। এর ছয় পাশকে কতভাবে রঙ করা যায়? ■

Exercise 9: 7-টা বিভিন্ন পুঁতি আছে। তাদের সবগুলোকে ব্যবহার করে একটা মালা গাঁথতে হবে। খালি খেয়াল রাখতে হবে যেন দুটো বিশেষ পুঁতি পাশাপাশি থাকে। কতভাবে সম্ভব? ■

Exercise 10: In how many ways can you keep 7 geography books and 5 history books in a circular shelf so that books of the same subject are side by side? ■

Exercise 11: 10-টা বিভিন্ন পুঁতি আছে। তাদের সবগুলোকে ব্যবহার করে একটা মালা গাঁথতে হবে। খালি খেয়াল রাখতে হবে যেন দুটোবিশেষ পুঁতি পাশাপাশি না থাকে। কতভাবে সম্ভব? ■

9.2 Distinct, ordered, repetition

এইবার আমরা এক ধরণের অংক শিখব যেখানে একই জিনিসকে বারবার ব্যবহার করা যাবে। যেমন যদি জানতে চাই 1 আর 2 ব্যবহার করে কতরকম দুই ঘরের সংখ্যা বানানো যায়, তবে উত্তর হবে--

$$11, \quad 12, \quad 21, \quad 22.$$

এখানে আমরা 11আর 22-এ একই digit-কে একাধিকবার ব্যবহার করেছি।

Example 7: Ten different letters on alphabet are given. Words with five letters are formed from these given letters. Then the number of words which have at least one letter repeated is (A) 69760 (B) 30240 (C) 99748 (D) None of these. **(IIT,1980)**

SOLUTION:

> Total number of five-letter words using 10 different letters is 10^5.
>
> Among these the number of words without any repeated letter is ${}^{10}P_5$.
>
> So the required answer is $10^5 - {}^{10}P_5 = 69760$.

■

Example 8: An n-digit number is a positive number with exactly n digits. Nine hundred distinct n-digit numbers are to be formed using only the three digits 2,5 and 7. The smallest value of n for which this is possible is (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9. **(IIT,1998)**

SOLUTION:

> The total number of distinct n-digit numbers using only the given digits is 3^n.
>
> So we need the smallest n such that $3^n \geq 900$.
>
> We have $3^6 = 729$ and $3^7 = 2187$.
>
> Thus $n = 7$.

■

Example 9: The number of seven digit integers, with sum of the digits equal to 10, and formed by using the digits 1,2 and 3 only, is (A) 55 (B) 66 (C) 77 (D) 88. **(IIT,2009)**

SOLUTION:

> By inspection we see that such a number must use either
>
> five 1's, one 2 and one 3.
>
> or
>
> four 1's and three 2's.
>
> In the first case, the total number of ways to arrange is
>
> $$\frac{7!}{5!1!1!} = 7 \times 6 = 42.$$
>
> In the second case, the total number of ways to arrange is
>
> $$\frac{7!}{4!3!0!} = 7 \times 5 = 35.$$
>
> So the total number is $42 + 35 = 77$.

■

এবারের অংকটা করলে repetition করা এবং না করার পার্থক্যটা ভালো করে বুঝবে। এখানে আবার function-র ধারণাটা কাজে দেবে। কোন ধরণের function-কে one-one আর কাকে onto বলে মনে আছে তো? One-one মানে একাধিক তীর এক জায়গায় যাবে না। আর onto মানে এমন কোনো জায়গা থাকবে না যেখানে একটাও তীর যায়নি। যদি $f: A \to A$ একটা function হয়, যেখানে A একটা finite set, তবে একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে f-এর পক্ষে onto হওয়া আর one-one হওয়া একই ব্যাপার। যদি A-র মধ্যে n-খানা element থাকে, তাহলে n-খানাই তীর বেরোবে, তারা যদি সবাই আলাদা আলাদা জায়গায় যায়, তবে কোনো জায়গাই ফাঁক থাকতে পারে না, বিপরীতপক্ষে, যদি কেউ ফাঁকা না পড়ে থাকে, তবে সব জায়গাতেই খালি একটা করেই তীর যেতে বাধ্য।

Example 10: Let A be a set of n distinct elements. Then the total number of distinct functions from A to A is ..., and out of these ... are onto functions. **(IIT,1985)**

SOLUTION:

> Let us label the elements of A as $1, 2, ..., n$. Then to specify a function $f: A \to A$ it is enough to specify $f(1), ..., f(n)$.

অর্থাৎ তীরগুলো কোথায় কোথায় যাচ্ছে।

> - Choose $f(1)$: n ways.
> - Choose $f(2)$: n ways.
> - . . .
> - In the n-th step, choose $f(n)$: n ways.
>
> So the total number of functions from A to A is n^n.

এখানে আমরা repetition হতে দিচ্ছি, যেমন $f(1)$ আর $f(2)$ সমান হলেও আপত্তি নেই। যদি তা না দিতাম, তবে পেতাম one-one function. সেটা নিয়েই দ্বিতীয় অংশ--

> Since we are working with functions from a finite set to itself, onto is same as one-one. For a function f to be one-one, we need $f(1), ..., f(n)$ to be all distinct.
>
> - In the first step, choose $f(1)$: n ways.
> - In the second step, choose $f(2)$: $n-1$ ways.
> - . . .
> - In the n-th step, choose $f(n)$: $n-(n-1)=1$ way.
>
> So the total number of onto functions from A to A is $n!$.

■

এই যে আমরা অংকগুলো এত কসরৎ করে করছি, এগুলোর বাস্তবে কি কোনো প্রয়োগ আছে? উত্তর হল--হ্যাঁ, আছে। একটা প্রয়োগ হল chemistry-তে isomer গোণার কাজে। Isomer মানে একই ফর্মুলাওয়ালা দুটো জিনিস যাদের গঠন আলাদা।

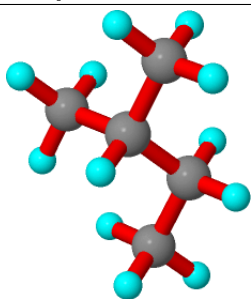
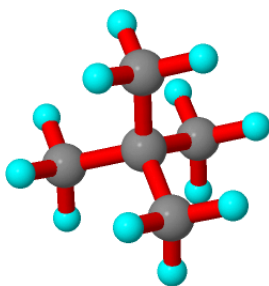



Fig 17 **Fig 18** **Fig 19** **Fig 20**

যেমন ধরো Fig 17 আর Fig 18-এ যে দুটো molecule দেখানো হয়েছে তাদের দুজনের মধ্যেই ঠিক 5-টা carbon আর 12-টা হাইড্রোজেন আছে (কার্বনগুলোকে কালো, আর হাইড্রোজেনদের নীল রঙে দেখিয়েছি)। সুতরাং দুজনেরই ফর্মুলা হল C_5H_{12}, কিন্তু দেখতেই পাচ্ছ যে ওদের কাঠামো আলাদা। এখানে Fig 17-এর জিনিসটাকে বলে 2-methylpropane আর অন্যটার নাম হল 2-2-methylbutane. যেখানে কাঠামোটা হল একটা molecule (অণু) তার বিভিন্ন জায়গায় বিভিন্ন atom (পরমাণু) কতভাবে থাকতে পারে তার হিসেব অনেক কাজে লাগে। খালি তার সঙ্গে আমরা এখনও পর্যন্ত যতটা শিখেছি তার একটা বড় পার্থক্য আছে, সেটা এই যে আমাদের ক্ষেত্রে জিনিসগুলো (যেমন চেয়ারে বসার উদাহরণে মানুষগুলো, মালার অংকে পুঁতিগুলো) সব distinct ছিল। কিন্তু একটা molecule-এ যদি কার্বনের পাঁচটা atom থাকে, তবে তারা সবাই একইরকম হবে। সুতরাং সেই কারণে জটিলতা কিছু বাড়বে। কালকে আমরা সেই ধরণের কিছু অংক কষতে শিখব।

DAY 10
Identical জিনিসের অংক

এতক্ষণ যা যা অংক করছিলাম সবই ছিল distinct জিনিসদের দিয়ে। যদি কিছু কিছু জিনিস identical (হুবহু একইরকম) হত তবে কিছু সমস্যা হতে পারে। কিরকম সমস্যা সেটা আগে বুঝে নিই। ধরো প্লাস্টিকের তৈরী তিনটে digit আছে একটা 1 আর দুটো 3 (Fig 19)। এদের মধ্যে থেকে খালি দুটোকে পাশাপাশি বসিয়ে কতরকম সংখ্যা তৈরী করা সম্ভব? 3-টে জিনিস থেকে 2-টো জিনিসকে পাশাপাশি বসানো হচ্ছে, কিন্তু তা বলে কি উত্তর $^3P_2 = 6$ হবে? না, কারণ Fig 20-এর মত 6-ভাবে সাজালে overcounting হয়ে যাচ্ছে। এখানে 3 দুটো প্লাস্টিকের জিনিস হিসেবে distinct হলেও, সংখ্যা হিসেবে identical. যেমন, দুটো 3 পাশাপাশি বসলে খালি 33-ই হবে, কোন 3-টা কোথায় বসেছে তার উপর কিছু নির্ভর করবে না। বুঝতেই পারছ যে এরকম অংকের ক্ষেত্রে সাবধানে পা ফেলতে হবে। সেই কায়দাটাই আমরা ধাপে ধাপে এবার শিখব।

10.1 কিছু identical, সবগুলোকে নিতে হবে

Example 11: How many different words (not necessarily meaningful) can be formed by rearranging the letters of the word '*ACCOMMODATION*'?

SOLUTION: এখানে অক্ষর আছে মোট 13-টা, তার মধ্যে A, C আর M রয়েছে 3-টে করে, আর O এসেছে 3-বার। যদি একই অক্ষর একাধিকবার আসার ঝামেলাটা না থাকত তবে যে উত্তর হত 13! তাতে নিশ্চয়ই সন্দেহ নেই? কিন্তু একই অক্ষর একাধিকবার থাকায় 13!-এর মধ্যে কিছু overcounting হয়ে যাবে। সেটাকে মোকাবিলা করাটাই এই অংকের প্রধান কাজ।

প্রথমে ধরে নাও যেন অক্ষরগুলো সবাই আলাদা আলাদা। চিন্তার সুবিধার জন্য C-গুলোকে C_1, C_2 ইত্যাদি কল্পনা করে নিতে পারো। মানে--

> We first label all the identical letters with distinct numbers to get $A_1C_1C_2O_1M_1M_2O_2DA_2TIO_3N$.
> Then the total number of permutations is 13!.

But this involves overcounting, because actually there is no label. We can count this as:

- Permute the 2 A's among themselves: $2!$ ways.
- Permute the 2 C's among themselves: $2!$ ways.
- Permute the 2 M's among themselves: $2!$ ways.
- Permute the 3 O's among themselves: $3!$ ways.

So, by multiplication principle, each word is counted $2! \times 2! \times 2! \times 3!$ times. Hence, by division principle, the required answer is

$$\frac{13!}{2!2!2!3!}.$$

■

এই উত্তরটার মধ্যে একটা প্যাটার্ণ আছে যেটা মনে রাখা ভালো--উপরতলায় রয়েছে মোট অক্ষরসংখ্যার factorial, আর নীচের তলায় আছে কোন অক্ষর কতবার এসেছে তাদের factorial-দের গুণফল। চাইলে তুমি Fig 21-এর মত করেও ভাবতে পারো, কারণ বাড়তি 1!-গুলোতে কিছু বদলাবে না। কিন্তু এইভাবে ভাবলে আরেকটা প্যাটার্ণ চোখে পড়বে--নীচের তলায় যাদের factorial-গুলো আছে, তাদেরকে যোগ করলে উপরের তলায় যার factorial আছে সেই সংখ্যাটা আসে, যেমন $2+2+2+3+1+1+1+1=13$. এই জিনিসটা আমরা কিন্তু আগেও আরেক জায়গায় দেখেছি, ${}^nC_r$-এর সংজ্ঞায়--

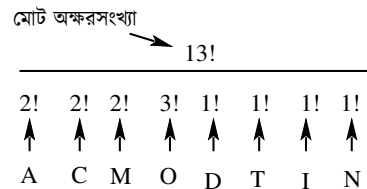
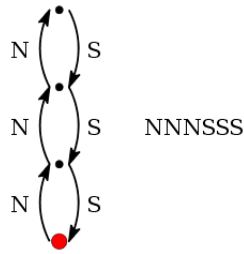
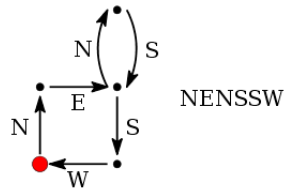
$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

আমরা বলেছিলাম যে ${}^nC_r$ (বা $\binom{n}{r}$)-কে লোকে binomial coefficient বলে। তার সাথে তাল রেখে Fig 21-কে বলে multinomial coefficient.
তোমার জন্য একটা একইরকমের অংক।

Exercise 12: How many different binary numbers can be formed using 5 0's and 3 1's? ■

একইরকম আরও একটা অংক, খালি একটু বাড়তি প্যাঁচ--এক জায়গায় একটা "at most" আছে, তার জন্য একটু addition principle লাগালেই হবে।

Exercise 13: How many different numbers can be formed using two 1's, three 5's and at most two 3's? ■

Fig 21

নীচের অংকের পিছনে যুক্তিটা একই, কিন্তু দেখতে একদম অন্যরকম।

Example 12: A person X standing at a point P on a flat plane starts walking. At each step, he walks exactly 1 foot in one of the directions North, South, East or West. Suppose that after 6 steps X comes back to the original position P. Then the number of distinct paths X can take is

(A) 196 (B) 256 (C) 344 (D) 400

(BStat2010.18)

SOLUTION: দুটো পথ দেখানো হয়েছে Fig 22 আর Fig 23-এ।

> Since the person has come back to the starting point, so the number of North (N) steps must equal the number of South (S) steps. Similarly, the numbers of East (E) and West (W) steps must also match.
>
> So we have only the following cases.
>
> Case 1: 3 North, 3 South, 0 East, 0 West:

এরকম পথের একটা উদাহরণ তো এক্ষুণি Fig 22-এই দেখলে।

> It is like making all 6 letter words with 3 N's and 3 S's.
>
> The number of such words is $\frac{6!}{3!3!} = 20$.

এবার দ্বিতীয় কেসটা, যার একটা উদাহরণ ইতমধ্যেই Fig 23-তে দেখানো হয়ে গেছে।

> Case 2: 2 North, 2 South, 1 East, 1 West:
>
> By similar argument the number here is $\frac{6!}{2!2!} = 180$.
>
> Case 3: 0 North, 0 South, 3 East, 3 West:
>
> Like case 1.
>
> Case 4: 1 North, 1 South, 2 East, 2 West:
>
> Like case 2.
>
> So the total answer is $2 \times (20 + 180) = 400$.

■

Exercise 14: How many different numbers not starting with 0 can be formed using two 0's, three 1's and four 2's? ■

Example 13: How many different nine digit numbers can be formed from the number 223355888 be rearranging its digits so that the odd digits occupy even positions? (A) 16 (B) 36 (C) 60 (D) 180. **(IIT,2000)**

SOLUTION:

- Pick two places out the 4 even positions for the 3's: ${}^4C_2$ ways.
- Place the 5's in the remaining two even positions: 1 way.
- Pick two places out the 5 remaining positions for the 2's: ${}^5C_2$ ways.
- Place the 8's in the remaining three positions: 1 way.

So the required answer is ${}^4C_2 \times 1 \times {}^5C_2 \times 1 = 6 \times 10 = 60$.

■

আমরা আগে এক লাইনে ছেলে-মেয়েদের সাজানোর অংক করেছিলাম মনে আছে? যেখানে ছেলেরা পাশাপাশিই থাকবে, বা মেয়েরা পাশাপাশি থাকবে না,এইরকম সব শর্ত থাকত? সেখানেপ্রতিতা মানুষ ছিল একেকটা distinct "জিনিস"। নীচের অংকদুটো একইরকম, খালি identical জিনিসদের নিয়ে।

Example 14: The number of arrangements of the letters of the word BANANA in which the two N's do not appear adjcently is (A) 40 (B) 60 (C) 80 (D) 100. **(IIT,2002)**

SOLUTION:

Total number of ways to arrange the letters is $\frac{6!}{3!2!}$.

Total number of ways to arrange the letters keeping the two N's together is $\frac{5!}{3!}$.

So the required answer is $\frac{6!}{3!2!} - \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{3!}(\frac{6}{2} - 1) = 40$.

■

Example 15: The total number of ways in which six '+' and four '−' signs can be arranged in a line such that no two '−' signs occur together is ... . **(IIT,1988)**

SOLUTION:

- Place the six `+'s in a row: 1 way.
- Place the four `−'s in the $6+1=7$ gaps: ${}^7C_4$ ways.

So the answer is $1 \times^7 C_4 = 35$.

■

Exercise 15: দশটা 1 আর পাঁচটা 2 ব্যবহার করে কতগুলো পনেরো ঘরের সংখ্যা বানানো যায় যেখানে কোনো দুটো 2 পাশাপাশি থাকবে না? ■

নীচের অংকটায় নানারকম কায়দা একসঙ্গে লাগবে, কিন্তু অংকটা সোজাই।

Exercise 16: Consider all possible permutations of the letters of the word ENDEANOEL. Match the condition/expressions in column 1 with the statements in column 2.

Column 1	Column 2
(A) The number of permutations containing the word ENDEA is	(P) 5!
(B) The number of permutations in which the letter E occurs in the first and the last positions is	(Q) $2 \times 5!$
(C) The number of permutations in which none of the letters D,L,N occurs in the last five positions is	(R) $7 \times 5!$
(D) The number of permutations in which the letters A,E,O occur only in odd positions is	(S) $21 \times 5!$

(IIT,2008)

HINT:

সাবধান, এখানে প্রথম সারির একাধিক জিনিসের সঙ্গে দ্বিতীয় সারির একই জিনিস ম্যাচ করতে পারে!

(A) Consider ENDEA as a single letter. Then there are a distinct letters: ENDEA, N, O, E, L. So the total number of permutations is b.

(B) After placing two E's at the first and last locations we have c letters, among which only N occurs twice. So the total number of permutations is d.

(C) Here the last five positions are filled with E, E, E, A, O. The first four positions are filled with D, L, N, N.

- Place E's in 3 from the last 5 positions: e ways.

- Place A,O in the remaining 2 from the last 5 positions: f ways.
- Place N's in 2 from the first 4 positions: g ways.
- Place D,L in the remaining 2 from the first 4 positions: h ways.

So the required answer is i

■

নীচের অংকটা একটু অন্যরকম। এরজন্য খেয়াল রাখতে হবে ডিকশনারীতে কিভাবে শব্দগুলো বর্ণানুক্রমিকভাবে সাজানো থাকে। ধরো দুটো শব্দ নিলাম--CALULUS আর CALENDAR. এর মধ্যে দ্বিতীয়টা ডিকশনারীতে আগে থাকবে। সেটা এইভাবে দেখা যায়। খানিকটা অব্দি দুটো শব্দই একই (CAL) প্রথম যে অক্ষরে গরমিল (মানে CALULUS-এর U আর CALENDAR-এর E) সেখানে E আছে আগে। ব্যস্, এটুকুই যথেষ্ট, বাকি অক্ষরগুলো কি আছে তাতে কিচ্ছু এসে যায় না। এইভাবে CALCULUS-র পূর্ববর্তী যেকোনো শব্দই তিনটে অংশ দিয়ে তৈরী বলে ভাবা যায়--প্রথমে একটা মিলের অংশ, প্রথম গরমিলে নতুন অক্ষরটা CALCULUS-এর সেই জায়গার অক্ষরটার আগে, বাকি অংশ যা খুশি। প্রথম আর তৃতীয় অংশটা কোনো কোনো ক্ষেত্রে নাও থাকতে পারে। যেমন ABACUS শব্দটাও CALCULUS-এর আগে আসে, এখানে প্রথম অক্ষরেই গরমিল।
এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে নীচের অংক কয়টা করো।

Example 16: The letters of the word COCHIN are permuted and all the permutations are arranged in an alphabetical order as in an English dictionary. The number of words that appear before the word COCHIN is (A) 360 (B) 192 (C) 96 (D) 48. **(IIT,2007)**
SOLUTION: আমরা এখানে একটা ছোট্টো notation ব্যবহার করব, লেখার সুবিধার জন্য।

> The words that apear before COCHIN are CC[O,H,I,N], CH[C,O,I,N], CI[C,H,O,N], CN[C,H,I,O].

যেহেতু notation-টা মোটেই প্রচলিত কিছু নয়, তাই এক লাইনে বুঝিয়ে দেব মানেটা।

> Here, for example, CC[O,H,I,N] means all words starting with CC followed by the letters O,H,I and N in some order.

এইটা কি করে পেলাম বলি। আমরা গরমিলের অক্ষরটা দিয়ে খুঁজছি। সে অক্ষরটা কি প্রথমেই থাকতে পারে? তার জন্য C-এর আগের কোনো অক্ষর নিতে হবে, কিন্তু COCHIN-এর মধ্যে সেরকম কোনো অক্ষর নেই। সুতরাং প্রথম অক্ষরে গরমিল সম্ভব নয়, ওখানে C-ই রাখতে হবে। এবার দেখি গরমিলটা দ্বিতয় স্থানে থাকতে পারে কিনা। দ্বিতীয় স্থানে আছে O. এর চেয়ে ছোটো অক্ষর আমাদের হাতে কি কি পড়ে আছে দেখি-- C (অন্য C-টা), H, I আর N. যদি C বসাই, তবে পাব CC[O,H,I,N], যেটা লিখেছি। একইভাবে H,I আর N বসালে পাব বাকিগুলো। এবার দেখি গরমিলটা তৃতীয় অক্ষরে হতে পারে কিনা, মানে শুরুটা COCHIN-এর মতই CO রাখব এবং তারপর H-র চেয়ে ছোটো কিছু বসাব। সেরকম কোনো অক্ষরই নেই। সুতরাং গরমিলটা তৃতীয় স্থানে হতে পারে না। এইভাবে চিন্তা করলেই দেখবে গরমিলটা খালি দ্বিতীয় স্থানেই হতে পারে, এবং যেগুলো লিখেছি তার বাইরে আর কোনো শব্দ পাবে না।

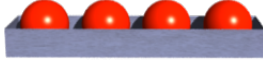
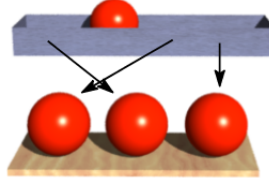
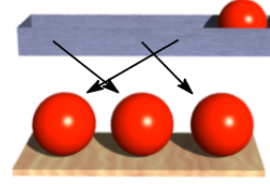



Fig 24 **Fig 25** **Fig 26**

> In each of these cases the part inside [...] consists of 4 distinct letters.
> So there are 4! words in each case.
> So the required answer is $4 \times 4! = 96$.

■

এবার নীচের অংকটা করো দেখি।

Exercise 17: The letters of the word CALCULUS are permuted and all the permutations are arranged in an alphabetical order as in an English dictionary. Find the number of words that appear before the word CALCULUS. ■

এবারের অংকটাও একইরকম, তবে একটু হোঁচট খাওয়ার ব্যবস্থা রেখেছি।

Exercise 18: The letters of the word WASP are permuted and all the permutations are arranged in an alphabetical order as in an English dictionary. Find the position of the word SWAP in this list. (না, ভুল ছাপানো নয়, পরের বার SWAP-ই বলেছি, WASP নয়)। ■

10.2 সবাই identical, partitions

এইবার আমরা সেইসব অংক করব যেখানে যে জিনিসগুলোকে নিয়ে কাজ হবে তারা সবাই identical. যেমন ধরো এই প্রশ্নটা-- আমার কাছে 4-টা বল আছে যারা অবিকল একইরকম দেখতে (Fig 24), এদের থেকে 3-টে বল নিয়ে কতভাবে এক লাইনে সাজিয়ে রাখা যায়? হঠাৎ মনে হতে পারে যে এতে আর নতুন কি আছে? সবচেয়ে বাঁদিকের বলটা নিতে পারি 4-ভাবে, তার পরেরটা 3-ভাবে, আর একেবারে ডানদিকেরটা 2-ভাবে। সুতরাং উত্তর হবে $^4P_3 = 4 \times 3 \times 2$. কিন্তু এই যুক্তিটা খাটে যখন বলগুলো disinct হয়। কিন্তু এখানে তা নয়। তার ফলে কি পরিবর্তন হয় দ্যাখো। মনে করো তিনটে বল নিয়ে সাজালে Fig 25-র মত। তাহলেও যা পাবে আবার Fig 26-এর মত সাজালেও তাই-ই পেতে। ওদের আলাদা করার কোনোই পথ নেই, কারণ বলগুলো যে সবই অবিকল একইরকম দেখতে! সুতরাং বুঝতেই পারছ যে, তিনটে বল যেভাবেই নাও না কেন, আর যেভাবেই সাজাও না কেন, সব সময়েই একই জিনিস পাবে। তাই এখানে আমাদের প্রশ্নের উত্তর হল স্রেফ 1.
এ থেকে মনে হতে পারে যে identical জিনিসদের নিয়ে কোনো মজার অংক বানানো যাবে না। না, এখানেও মজার অংক সম্ভব, তবে একটু অন্যভাবে। একটা উদাহরণ দেখলে সেটা বোঝা যাবে।

Example 17: আমার কাছে 10-টা এক টাকার কয়েন আছে, সেগুলো আমি তিনজন লোকের মধ্যে বিতরণ করতে চাই, যাতে প্রত্যেকে অন্ততঃ একটাকা পায়। কতভাবে করা যাবে?

SOLUTION: এখানে কয়েনগুলো সবই identical. যাদের কয়েনগুলো দেব, তাদের একমাত্র আগ্রহ থাকবে কে কটা কয়েন পেল সেটা নিয়ে, কে কোন কয়েনটা পেল সেটা গুরুত্বপূর্ণ হবে না। যেমন ধরো কাজটা একভাবে করা যায় এইভাবে--

> প্রথম জন 3-টে, দ্বিতীয় জন 5-টা আর তৃতীয় জন বাকি 2-টো।

এখানে আমরা 10-কে ভাঙলাম $3+5+2$ হিসেবে। আবার এইভাবেও করা যেত--

Fig 27 **Fig 28**

প্রথম জন 1-টা, দ্বিতীয় জন 1-টা আর তৃতীয় জন বাকি 8-টা।

এখানে $10 = 1 + 1 + 8$. যদি $10 = 8 + 1 + 1$ নিতাম তবে সেটাও আরেকটা পথ হত--

প্রথম জন 8-টা, দ্বিতীয় জন 1-টা আর তৃতীয় জন বাকি 1-টা।

প্রশ্ন হল এরকম মোট কতভাবে করা যায়। এইরকম অংক করার একটা কায়দা আছে যেটা না জানা থাকলে চট্‌ করে ভেবে বার করা একটু কঠিন। এই কায়দাটা এবার শিখব। তার আগে বলে রাখি যে এরকমভাবে একটা positive intger-কে ছোটো ছোটো positive intger-এর যোগফল হিসেবে প্রকাশ করাকে বলে partition করা, যেমন আমরা এখানে 10-এর বিভিন্ন partition নিয়ে আলোচনা করছি। যেহতু parition-এর অংশগুলো কে আগে কে পরে সেটা গুরুত্বপূর্ণ (মানে $1 + 1 + 8$ আর $8 + 1 + 1$-কে আলাদা ধরা হচ্ছে), তাই এদের বলব ordered partition.
এবার কৌশলটা শেখা যাক। এর জন্য প্রথমে কয়েনগুলোকে এক লাইনে দশটা ফুট্‌কি দিয়ে আঁকি (Fig 27(a))। এবার ধরো প্রথম জনকে দেব 3-টে কয়েন। সেইটা বোঝানোর জন্য প্রথম তিনটে ফুট্‌কির পরে একটা লাইন টেনে আলাদা করে দেব (Fig 27(b)), ওটা যেন জমিদারির দেওয়াল, ওর বাঁদিকে যা আছে সেগুলো প্রথম লোকটার সম্পত্তি। এবার ধরো দ্বিতীয়জনকে দেব 5-টা। সুতরাং আরেকটা দেওয়াল দেব Fig 27(c)-এর মত করে। এই দেওয়ালের ডানদিকে যা রইল সেগুলো যাবে তৃতীয় লোকটার পকেটে।
সুতরাং অংকটা পরিণত হল 10-টা ফুট্‌কির ফাঁকে ফাঁকে 2-টো লাইন কতভাবে টানা যায়। মনে হতে পারে যে, এতে লাভটা কি হল? কয়েনকে কয়েন না বলে ফুট্‌কি বলাতে কোন সমস্যার সুরাহা হল? সেটা এক্ষুণি বুঝবে কিন্তু তার আগে বল Fig 28(a)-এর মত করে কি লাইনদুটো আঁকা চলবে? উত্তর হল--না, কারণ তাহলে প্রথম লোকটার বরাতে কিছুই জুটছে না। অংকএর শর্তে বলা ছিল যে প্রত্যেকেই যেন অন্ততঃ একটাকা পায়। একই যুক্তিতে Fig 28(b) আর Fig 28(c)-এর মত করেও লাইন টানা যাবে না।
এবার কি অংকটা বেশ চেনা চেনা লাগছে, 10-টা ফুট্‌কি, তাদের মাঝে মাঝে $10 - 1$-টা ফাঁক। তার ভিতর থেকে ঠিক 2-টো ফাঁক কতভাবে নির্বাচন করা যায় লাইন টানার জন্য? এর উত্তর যে ${}^9C_2$ সেটা নিশ্চয়ই আর বলে দিতে হবে না? ■

এই যুক্তিটা কতটা তোমার মাথায় ঢুকেছে সেটার পরীক্ষা হয়ে যাবে নীচের অংকটা করতে গেলেই।

Exercise 19: 20-টা একইরকম লজেন্স আছে। 5-টা বাচ্চার মধ্যে কতভাবে ভাগ করে দেওয়া যায়, যাতে প্রত্যেকটা বাচ্চাই অন্ততঃ একটা করে লজেন্স পায়? ■

এই ব্যাপারটাকেই অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখলে পাব--

THEOREM
Let n be any positive integer. Let $r \leq n$ be another positive integer. Then the number of ordered partitions of n into r *positive* parts is ${}^{n-1}C_{r-1}$.

এইবার অংকটাকে সামান্য জটিল করছি। এখানেও একই কায়দা খাটবে, কিন্তু আগে একটু প্রস্তুতি নিতে হবে।

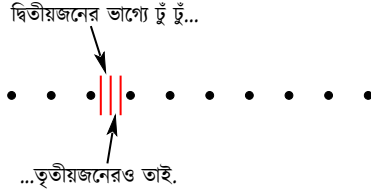



Fig 29 **Fig 30**

Exercise 20: আবার 20-টা একইরকম লজেন্স নিলাম। সেই 5-টা বাচ্চার মধ্যেই ভাগ করে দিতে হবে। কিন্তু এবার শর্ত হল--প্রত্যেকেই যেন অন্ততঃ দুটো করে পায়। ■

এটা একবার পেরে গেলে পরের অংকটা সহজেই হওয়া উচিত।

Exercise 21: There are 30 identical apples. In how many can you distribute them among 4 boys such that the i-th boy gets at least i apples $(i = 1, 2, 3, 4)$? ■

এই বার যে অংকটা দেব সেটা দেখতে প্রায় আগেরগুলোর মত হলেও কায়দাটা বেশ অন্যরকম লাগবে।

Example 18: 10-টা একটাকার কয়েন আছে, চারটে লোকের মধ্যে বিতরণ করতে হবে। এই পর্যন্ত আগের মতই। খালি এবার "প্রত্যেকেই যেন অন্ততঃ একটাকা পায়" শর্তটা নেই। কারো ভাগে যদি শূন্যও পড়ে তাতেও আপত্তি নেই। এবার কাজটা কতভাবে করা যাবে?

SOLUTION: তাড়াহুড়ো করতে গেলে এখানে কয়কধরণের ভুল হয়ে যাবার সম্ভাবনা। আগে সেগুলোর কথা বলি,তারপর ধীরেসুস্থে ঠিক কায়দাটা বোঝানো যাবে। এখানেও শুরু করব দশটা ফুটকি এঁকে। লোক আছে 4-টে, সুতরাং তাদের জমিদারির সীমানা বোঝাতে লাগবে $4 - 1 = 3$-টে লাইন। যেহেতু কারো ভাগে শূন্যও পড়তে পারে, তাই একই ফাঁকে একাধিক লাইন টানা যেতে পারে। যেমন Fig 29-এর ক্ষেত্রে দ্বিতীয় আর তৃতীয়জন একটাকাও পায় নি। লাইনগুলো একেবারে দুই প্রান্তেও দেওয়া চলবে। যেমন Fig 30-এর বেলায় চতুর্থ জনের ভাগ্যে কিছুই জোটে নি। এই অবধি যুক্তিতে কোনো ভুল নেই। এইবার ভুলটা করছি--

> *যেহেতু দুই প্রান্তেও লাইন টানা যাবে, তার মানে লাইন টানার ফাঁক হল $10 + 1 = 11$-টা। লাইন টানতে হবে 3-টে। সুতরাং উত্তর নিশ্চয়ই ${}^{11}C_3$.*

এই যুক্তিটা কেন ভুল বুঝছ তো? এখানে তিনটে লাইন টানার জন্য তিনটে আলাদা ফাঁকের তো দরকার নেই, একই ফাঁক দিয়ে একাধিক লাইন টানা যায়। তার মানে repetition চলতে পারে, সেই কারণে ${}^nC_r$-এর কায়দা এখানে প্রযোজ্য নয়। এইটা বোঝার পর তুমি হয়তো ব্যস্ত হয়ে বলে উঠবে--

> *ওঃ বুঝে গেছি, তিনটে লাইন টানতে হবে, প্রত্যেকটার জন্যই 11-টা ফাঁকা আছে, কারণ যে ফাঁকে একবার লাইন টেনেছি, সেখানে আবারও লাইন টানা যাবে! তার মানে উত্তর হবে $11 \times 11 \times 11 = 11^3$.*

দুঃখের বিষয়, এটাও ভুল যুক্তি, কারণ এই ফর্মুলটা তুমি লাগালে সেটা হল যেখানে distinct object, ordered, repetition allowed-এর জন্য। এখানে ফাঁকগুলো distinct বটে, এবং repetition-ও চলতে পারে বটে, কিন্তু লাইনগুলো তো সবই একইরকম, তাই কোন কোন ফাঁকগুলো নিচ্ছ তার order-টা গুরুত্বপূর্ণ নয়। যেমন যদি দ্বিতীয়, পঞ্চম আর নবম ফাঁকে দাগ টানি, তাহলেও যা হবে আর পঞ্চম, দ্বিতীয় আর নবম ফাঁকে লাইন টানলেও তাই-ই হবে। এইবার তুমি হয়তো খানিকক্ষণ মাথা চুলকে বলবে--

> *দাঁড়াও, এটাকে division principle দিয়ে শায়েস্তা করব। তিনটে লাইন একইরকম, কিন্তু আলাদা করে গুনছি, সুতরাং সব কিছুই 3! বার করে গোনা হয়ে যাচ্ছে। অতএব 3! দিয়ে ভাগ করে উত্তর পাব $11^3/3!$.*

তোমার অধ্যবসায় নিঃসন্দেহে প্রশংসনীয়, কিন্তু এই সমাধানেও একটা গলদ থেকে গেছে। সবকিছুই যে ঠিক $3!$ বার করেই গোণা হয়েছে তা কিন্তু নয়। যেমন ধরো যদি তিনটে লাইনই যদি তুমি দ্বিতীয় ফাঁকটা দিয়ে টনো, তবে সেটা একবারই গোণা হয়েছে। বস্তুতঃ যদি তুমি কতগুলো ফাঁক ব্যবহার করেছ তারুপর নির্ভর করবে যে কতবার গোণা হচ্ছে। সুতরাং division principle সরাসরি লাগানো যাচ্ছে না।
এবার তুমি হয়তো চটেমটে বলবে--দুচ্ছাই, এতসব যে শিখলাম, তার কোন ফর্মুলাটা তাহলে লাগাব রে বাবা? ঠাণ্ডা মাথায় ভাবা যাক। এখানে আমরা 11-টা ফাঁক নিয়ে কাজ করছি, এরা distinct. একই ফাঁক একাধিক বার ব্যবহার করা যায়, মানে repetition চলতে পারে। কোন ফাঁকে আগে লাইন টানছি আর কোন ফাঁকে পরে তাতে কিছু এসে যায় না, মানে unordered. এবার ভালো করে ভাবলেই দেখবে যে এই রকম অংকের কোনো কায়দাই এখনো আমরা এই বইতে আলোচনা করি নি। অর্থাৎ কিনা এখানে একটা নতুন কায়দা বার করতে হবে।
সৌভাগ্যক্রমে কায়দাটা সোজাই, খালি অংকটাকে একটু অন্য দৃষ্টিভঙ্গী থেকে দেখতে হবে। অমনি মুহূর্তের মধ্যে উত্তরটা তোমার চোখে ধরা দেবে। ফাঁকের কথা ভুলে যাও, খালি দশটা ফুট্‌কি আর তিনটে লাইনের কথা ভাবো। লক্ষ কর যে তিনটে লাইনকে দশটা ফুট্‌কির মাঝে বা দুপাশে যে কোনো ভাবে বসানো যায়। সুতরাং যদি ফুট্‌কির জায়গায় A আর লাইনের জায়গায় B লিখি তবে প্রশ্নটা কি এইরকম দাঁড়াচ্ছে না?--

> 10-টা A আর 3-টে B আছে। এদের সবাইকে ব্যবহার করে মোট কতগুলো শব্দ বানানো যায়?

উত্তর তো জানিই--$\frac{13!}{10!3!}$, যাকে তুমি ${}^{13}C_3$ আকারেও লিখতে পারো। ■

Exercise 22: 10-টা একইরকম লজেন্স আছে। তিন জনের মধ্যে ভাগ করে দিতে হবে, যেখানে প্রত্যেককেই যে লজেন্স পেতেই হবে এমন কোনো কথা নেই। কতভাবে করা যায়? ■

THEOREM
Let n be any positive integer. Let $r \leq n$ be another positive integer. Then the number of ordered partitions of n into r *nonnegative* parts is ${}^{n+r-1}C_{r-1}$.

নীচের অংক দুটো একইরকম, সামান্য ঘুরিয়ে।

Exercise 23: 30-টা আপেল, একইরকম দেখতে। দিতে হবে 5 জনের মধ্যে ভাগ করে। কতভাবে দেওয়া যায়, যাতে অন্ততঃ একজনের ভাগে কিছু না পড়ে? ■

Exercise 24: 12-টা একইরকম কমলালেবু আছে। আর আছেন রাজামশাই এবং তাঁর দুই রাণী, সুয়োরাণী আর দুয়োরাণী। এই তিন জনের মধ্যে লেবুগুলো এমনভাবে ভাগ করে দিতে হবে যাতে রাজামশাই অন্ততঃ দুটো পান, আর সুয়োরাণী পায় অন্ততঃ 3-টে। কিন্তু দুয়োরাণীর ভাগে কিছু না জুটলেও কারো মাথা ব্যথা নেই। কতভাবে করা যাবে? ■

এবারের অংকটা বেশ খানিকটা কঠিন। এর পিছনে গল্পটা বলে নিই, তবে ভাবতে সুবিধা হবে। আমরা একটু আগে আপেল ভাগ করার অংকে distinct object, unordered, repetion-র একটা অংকে উপস্থিত হয়েছিলাম, এবং সখেদে আবিষ্কার করেছিলাম যে এই ধরণের অংক কষার কোনো হাতিয়ার আমাদের জানা নেই। তখন আমরা অন্য দৃষ্টিভঙ্গী থেকে আক্রমণ করে অংকটাকে সহজেই করে ফেলেছিলাম। সুতরাং প্রশ্ন জাগে যে এই কায়দায় কি যেকোনো distinct object, unordered, repetion-জাতীয় অংককেই আক্রমণ করা যাবে? উত্তর হল--হ্যাঁ। এই চিন্তা থেকেই নীচের অংকটার জন্ম।

Exercise 25: চারটে সংখ্যা আছে $1, 56, 720$ আর 12340. তোমাকে এদের থেকে চারটে সংখ্যা নিতে হবে (একই সংখ্যা একাধিক বার নিতে পারো), এবং নির্বাচিত সংখ্যাগুলোকে যোগ করতে হবে। এইভাবে মোট কতরকম যোগফল পাওয়া

সম্ভব? যেমন যদি $1, 56, 1, 12340$ নাও তবে যোগফল হবে 12398. ■

Example 19: Let $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5$ be positive integers such that $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5 = 20$. The number of such distinct arrangements $((n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ is: **(IIT(adv),2014)**

SOLUTION:

Let $m_1 = n_1$ and $m_k = n_k - n_{k-1}$.
Then

$$n_k = m_1 + \cdots + m_k.$$

So the problem reduces to finding $m_1, ..., m_5 \in \mathbb{N}$ such that

$$5m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 2m_4 + m_5 = 20.$$

Now let $p_i = m_i - 1$. Then p_i's are nonnegative intgers such that

$$5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 = 5.$$

By inspection we list all the possibilities:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, \\ p_2 &= 1, p_5 = 1, \\ p_3 &= 1, p_4 = 1, \\ p_3 &= 1, p_5 = 2, \\ p_4 &= 1, p_5 = 3, \\ p_4 &= 2, p_5 = 1, \\ p_5 &= 3. \end{aligned}$$

So the required answer is 7.

■

Example 20: What is the number of ordered triplets (a, b, c) where a, b, c are positive integers (not necessarily distinct) such that $abc = 1000$?

(A) 64 (B) 100 (C) 200 (D) 560

(ISI2014.24)

SOLUTION:

We have $1000 = 2^3 5^3$.

So a, b, c each must be of the form 2^i5^j. If we let

$$\begin{aligned} a &= 2^{i_1}5^{j_1} \\ b &= 2^{i_2}5^{j_2} \\ c &= 2^{i_3}5^{j_3}, \end{aligned}$$

then we must have

$$i_1 + i_2 + i_3 = j_1 + j_2 + j_3 = 3.$$

Thus each triple (a, b, c) may be formed by choosing two partitions of 3, where each part is a nonnegative integer.

1) Pick i_1, i_2, i_3 : ${}^5P_2 = 10$ ways. 2) Pick j_1, j_2, j_3 : ${}^5P_2 = 10$ ways.

So, by the multiplication principle, the anwer is $10^2 = 100$.

■

Exercise 26: In how may ways can 20 identical chocolates be distributed among 8 students so that each student gets at least one chocolate and exactly two students get at least two chocolates each?

(A) 308 (B) 364 (C) 626 (D) $\binom{8}{2}\binom{17}{7}$

(ISI2014.10)

HINT:

একটা উদাহরণ নাও, মানে শর্তগুলো মেনে কোনো একভাবে চকোলেটগুলো বিতরণ কর। তাহলেই বুঝবে যে অংকটা আসলে সোজাই।

■

Example 21: Consider a sequence of 10 A's and 8 B's placed in a row. By a run we mean one or more letters of the same type placed side by side. Here is an arrangement of 10 A;s and 8 B's which contains 4 runs of A and 4 runs of B :

$$A\ A\ A\ B\ B\ A\ B\ B\ B\ A\ A\ B\ A\ A\ A\ A\ B\ B.$$

In how many ways can 10 A's and 8 $B's$ be arranged in a row so that there are 4 runs of A and 4 runs of B?

(A) $2\binom{9}{3}\binom{7}{3}$ (B) $\binom{9}{3}\binom{7}{3}$ (C) $\binom{10}{4}\binom{8}{4}$ (D) $\binom{10}{5}\binom{8}{5}$

(ISI2012.21)

SOLUTION: প্রথমে A-গুলোকে 4-টে গুচ্ছে ভেঙে নাও। B-গুলোকেও তাই করো। Fig 31-এ যেমন দেখিয়েছি। এবার এই গুচ্ছগুলোকে একটা অন্তর সাজিয়ে দিলেই A আর B-র চারটে করে run তৈরী হয়ে যাবে। শুরুটা A দিয়ে নাকি B দিয়ে তার উপর নির্ভর করে দুভাবে এ কাজটা করা যাবে (Fig 32)।

Fig 31	**Fig 32**
AA AAA A AAAA	AABBBAAABABAAAABBB
BBB B B BBB	BBBAABAAABABBBAAAA

> - Pick an ordered partition of the 10 A's with 4 positive parts: ${}^9C_3$ ways.
> - Pick an ordered partition of the 8 B's with 4 positive parts: ${}^7C_3$ ways.
> - Arrange the parts alternately: 2 ways (starting with A or B).
>
> So, by multiplication principle, the answer is $2 \times {}^9C_3 \times {}^7C_3$.

■

Combinatorics-এর অংকে সব সময়ে যে জিনিসগুলো গুণছ তাদের কয়েকটা উদাহরণ নিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। সেকথা আগেই বলেছি। এখনও যদি তোমার মধ্যে সে অভ্যাসটা গড়ে না উঠে থাকে, তবে নীচের অংকটায় খামোখা হোঁচট খাবে।

Exercise 27: আগের অংকটাই আবার কর, খালি এবার A-র পাঁচটা run এবং B-র তিনটে run চাই। ■

Exercise 28: আবার আগের অংকটাই কর, খালি এবার A-র ঠিক চারটে run থাকলেই আমরা খুশি, B-র উপর কোনো শর্ত নেই। ■

Example 22: How many natural numbers less than 10^8 are there, with sum of digits equal to 7? **(BST-BMT2013)**

SOLUTION: 10^8-এর চেয়ে ছোটো মানে digit-এর সংখ্যা 8 বা তার কম। যদি 8-এর কম হয় তবে বাঁদিকে কয়েকটা বাড়তি 0 লাগিয়ে 8 ঘর করে দিতে পারি, যেমন 1123-কে ভাবব 00001123 হিসেবে। সুতরাং--

> The answer is the number of ways to partition 7 into 8 ordered parts where a part may equal 0.
>
> This is $\binom{7+7}{7} = \binom{14}{7}$.

■

Exercise 29: How many natural numbers less than 10^9 are there, with sum of digits equal to 9? ■

এবার একটু প্যাঁচ। যদি আগের অংক দুটো ঠিক করে না বুঝে থাকো, তবে ঝামেলায় পড়বে।

Exercise 30: How many natural numbers less than 10^9 are there, with sum of digits equal to 10? ■

DAY 11
কি কি এখনো বলা হয়নি

Combinatorics অংকের একটা মস্ত বড় শাখা, একটা চটি বইয়ের পাল্লায় তার সবটা ধরানো অসম্ভব। তার উপরে আবার এই বইটা সিলেবাসের কথা মাথায় রেখে লেখা। ফলে মজার মজার অনেক কথাই বলা হল না। কিন্তু দুএকটা জিনিস একেবারে না বলললেই নয়। জিনিসগুলো এতক্ষ যা করেছি তাদের চেয়ে বরং সহজই, এবং এদের প্রয়োগও অনেক। তবুও স্কুলের সিলেবাসের জগতে যে কারণেই হোক এদের কদর কম, যদিও competitive পরীক্ষার দরবারে এদের মাঝে মাঝেই দেখা মেলে।

11.1 Principle of inclusion-exclusion

আমরা আগেই বলেছি যে combinatorics-এর দুনিয়ায় প্রধান দুটো সমস্যার একটা হল overcounting, আর অন্যটা হল undercounting. এবার আমরা একটা কায়দা শিখব যেটা দিয়ে overcounting -এর মোকাবিলা করা যায়।

Example 23: একটা ঘরে তিনজন লোক আছে, তাদের মধ্যে দুইজন বাবা আছে,আর দুইজন সন্তান। কি করে সম্ভব?

SOLUTION: এই অংকটা আমরা আগেই দেখেছি। ধরো ঘরের মধ্যে আছে দশরথ, রাম আর কুশ। তাহলে দশরথ আর রাম হল দুই বাবা। আর রাম এবং কুশ হল দুই সন্তান। লক্ষ কর যে মোট সংখ্যা $2+2=4$ হচ্ছে না, কারণ তাহলে রাম দুইবার গোণা হয়ে যাচ্ছে। সুতরাং হিসেব মেলাতে গেলে রামকে একবার বাদ দিতে হবে--

$$\underbrace{2}_{\text{কজন বাবা}} + \underbrace{2}_{\text{কজন সন্তান}} - \underbrace{1}_{\text{কজন দুটোই}}.$$

■

এই যুক্তিটাই হল inclusion-exclusion principle-এর একটা সহজ প্রয়োগ। প্রথমে আমরা সব বাবাদের আর সব সন্তানদের আলাদা করে হিসেবে নিলাম (বা include করলাম), এর ফলে যারা দুইবার করে হিসেবে ঢুকে গেল, তাদেরকে একবার করে বাদ দিয়ে দিলাম (মানে exclude করলাম)। এই কাজটা আরও বেশী বারও করা যেত। কিভাবে, বোঝার জন্য প্রথমে এই উদাহরণটাকেই আমরা set ব্যবহার করে লিখি। ধরো A_1 হল বাবাদের set, আর A_2 হল সন্তানদের set, মানে

$$A_1 = \{\text{দশরথ, রাম}\}, \quad A_2 = \{\text{রাম, কুশ}\}.$$

ঘরের মধ্যে মোট লোকদের set হল $A_1 \cup A_2$. তাহলে আমরা যে ফর্মুলাটা ব্যবহার করেছি সেটা হল

$$|A_1 \cup A_2| = \underbrace{|A_1| + |A_2|}_{\text{inclusion}} - \underbrace{|A_1 \cap A_2|}_{\text{exclusion}}.$$

এখানে $|A_1|$ মানে A_1-এর সাইজ, ইত্যাদি। এবার ধরো তিনটে set আছে, A_1, A_2, A_3. আমাদের বার করতে বলেছে $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \underbrace{|A_1| + |A_2| + |A_3|}_{\text{inclusion}} \underbrace{-(|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3|)}_{\text{exclusion}} \underbrace{+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}_{\text{inclusion}}.$$

একই গল্প আমরা চারটে বা পাঁচটা বা তারও বেশী set-এর জন্যও করতে পারি। কিন্তু বুঝতেই পারছ যে ফর্মুলাটা ক্রমশঃই লম্বা হয়ে যাবে। তাই আমরা একটু সংক্ষেপে লিখব। সংক্ষেপে লিখলে তিনটে set-র ফর্মুলাটা হবে এইরকম--

$$|[|\bigcup_i A_i|]| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|.$$

এইভাবে লিখলে চারটে A_i-এর বেলাতেও অসুবিধা হবে না--

$$|[|\bigcup_i A_i|]| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_J \cap A_k| - \sum_{i<j<k<\ell} |A_i \cap A_J \cap A_k \cap A_\ell|.$$

মানে প্যাটার্ণটা বুঝতেই পারছ, inclusion, exclusion, inclusion, exclusion, এইভাবে একটা অন্তর একটা চলতে থাকবে।

Inclusion-exclusion principle ব্যবহার করে কি করা যায়? যদি তোমাকে কিছু set দেওয়া থাকে $A_1, ..., A_n$, এবং তোমাকে ওদের union-এর সাইজ বার করতে বলে, তবে সেটা করা যায়। একধরণের "at least one"-জাতীয় অংকে এটা খুব কাজে দেয়। কয়েকটা উদাহরণ দেখি।

Example 24: The total number of ways in which 5 balls of different colours can be distributed among 3 persons so that each person gets at least one ball is (A) 75 (B) 150 (C) 210 (D) 243. **(IIT,2012)**

SOLUTION: যেহেতু "at least one" আছে, তাই subtraction principle-এর কথা মাথায় আসে--

> Let A denote the set of all possibilities.
> Let A_i denote the set of all possibilities where the i-th person gets no ball ($i = 1, 2, 3$).
> We are trying to find $|A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

এইটা বুঝলে তো? "সবাই অনততঃ একটা বল পেয়েছে" এই কথাটার উল্টো হল "কেউ একজন একটাও বল পায় নি"।

> Now $|A| = 3^5 = 243$.

এটা সহজ multiplication principle-এর প্রয়োগ। পাঁচটা বলের প্রত্যেকটাই তিনজনের কারুর কাছে যাবে।

> Similarly, $|A_i| = 2^5$ for $i = 1, 2, 3$.
> Also for each $i \neq j$ we have $|A_i \cap A_j| = 1^5 = 1$.

এটা কি করে হল?$A_i \cap A_j$ মানে i এবং j একটাও বল পায় নি। তার মানে সবগুলো বলই গেছে অবশিষ্ট লোকটার কাছে, সেটা একভাবেই হতে পারে।

> Finally $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$.

কারণ এটা অসম্ভব। কেউই যদি কোনো বল না পায়, তবে বলগুলো কি ভোজবাজির মত উড়ে গেল নাকি?

> So, by the inclusion-exclusion principle,
>
> $$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 3 \times 2^5 - 3 \times 1 + 0 = 93.$$
>
> So, by subtraction principle, the required answer is $243 - 93 = 150$.

■

Exercise 31: Five balls of different colours are to be placed in three boxes of different sizes. Each box can hold all five. In how many different ways can we place the balls so that no box

remains empty? **(IIT,1981)** ■

Example 25: There are four balls of different colours and four boxes of colours same as those of the balls. The number of ways in which the balls, one in each box, could be placed such that a ball does not go to a box of is own colour is ... . **(IIT,1992)**

SOLUTION:

> Let A denote the set of all ways to place the balls.
> Let A_i denote the set of all these ways for which the i-th ball goes to the box of its own colour ($(i = 1, 2, 3, 4)$.
> Then we want to find
> $$|A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|.$$
> Now $|A| = 4!$.

এবার $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ বার করব inclusion-exclusion principle লাগিয়ে। তার জন্য চাই $|A_i|$, $|A_i \cap A_j|$, $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ আর $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell|$.

> Similarly, for each i, we have $|A_i| = 3!$.
> For each $i \neq j$ we have $|A_i \cap A_j| = 2!$.
> For each i, j, k (all distinct), we have $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1!$.
> For each i, j, k, ℓ (all distinct), we have $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell| = 0!$.

এবার আমরা inclusion-exclusion principle লাগাবার জন্য তৈরী--

> So, by the inclusion-exclusion principle,
> $$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ = \; & \sum_i A_i - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k<\ell} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell| \\ = \; & {}^4C_1 \times 3! - {}^4C_2 \times 2! + {}^4C_3 \times 1! - {}^4C_4 \times 0! \end{aligned}$$

এখানে আবার ${}^4C_1, {}^4C_2$ ইত্যাদিরা এল কোথা থেকে? তার কারণ এখানে 4-টে set আছে, A_1, A_2, A_3 আর A_4. তাদের থেকে 1-টাকে A_i হিসেবে নেওয়া যায় ${}^4C_1$-ভাবে। 2-টোকে A_i, A_j হিসেবে নেওয়া যায় ${}^4C_2$-ভাবে, ইত্যাদি।

> $$= \frac{4!}{1!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!}.$$

So the required answer is

$$4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=9.$$

■

উপরের অংকের উত্তরটা যে 9 হল সেটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা কর।

Example 26: There are 8 balls numbered 1,2,...,8, and 8 boxes numbered 1,2,...,8. The number of ways one can put these balls in the boxes so that each box gets one ball and exactly 4 balls go in their corresponding numbered boxes is

(A) $3\times\binom{8}{4}$ (B) $6\times\binom{8}{4}$ (C) $9\times\binom{8}{4}$ (D) $12\times\binom{8}{4}$

(BStat2010.1)

SOLUTION:

1. Pick the 4 balls to go into corresponding boxes: $\binom{8}{4}=$ ways.
2. Arrange the remaining balls so that none goes to correct box: 9 ways.

এই শেষের ধাপটা আগের অংকের উত্তর থেকে টুকে দিলাম।

So the answer is $9\times\binom{8}{4}$.

■

11.2 Pigeon hole principle

এবার যেটা শিখতে চলেছি তার চেয়ে সহজ জিনিস আর কিছুই হয় না। ধরো তোমাকে 10-টা পায়রার খোপ দিলাম, আর 11-টা পায়রা দিলাম সেই খোপগুলোতে রাখতে। শর্ত একটাই--কোনো খোপে যেন একাধিক পায়রা না থাকে। পারবে এভাবে রাখতে? অসম্ভব! 10-টা খোপের প্রত্যেকটায় যদি একের বেশী পায়রা না রাখা যায়, তবে মোট রাখা যাবে বড়জোর 10-টা, এদিকে দিয়েছে তো $11(>10)$-টা পায়রা!

এইটাকেই বলে pigeon hole principle. একটু ঘুরিয়ে বললে, 10-টা খোপে 11-টা পায়রাকে রাখতে হলে, অন্ততঃ একটা খোপে একাধিক পায়রা না ঢুকিয়ে গত্যন্তর নেই।

Pigeon hole principle

If m pigeons are to be kept in n pigeon holes such that no hole contains more than one pigeon, then the smallest value of m for which this cannot be done is $m=n+1$.

মনে হতে পারে যে এই সহজ কথাটাকে সাতকাহন করে কি লাভ হল! আসলে এই কথাটা অনেক জায়গায় কাজে লাগে। একটা উদাহরণ দেখি।

Example 27: একটা বাক্সে তিন জোড়া মোজা আছে। তুমি তার থেকে এক জোড়া মোজা বারকরতে যাও। অবশ্যই জোড়

মিলিয়ে, মানে বাঁ পায়ের জন্য একটা লাল রঙের মোজা আর ডান পায়ের জন্য নীল রঙের এরকম না হয়ে যায়। সমস্যা হল ঘরটা অন্ধকার তাই তোমাকে বাক্সের মধ্যে একবার হাত চালিয়ে কিছু সংখ্যক মোজা বার করে আনতে হবে, যাতে অন্ততঃ একটা সম্পূর্ণ জোড়া থাকে। সবচেয়ে কম কতগুলো মোজা বার করলে সে বিষয়ে গ্যারানটি দেওয়া যাবে?

SOLUTION: ধরো খালি দুটো বার করলাম। তাতে এমন হতেই পারে যে একটা লাল, একটা নীল মোজা উঠল। যদি তিনটে বার করতাম, তাহলেও তিনটে অলাদা রঙের মোজা উঠতে পারত। কিন্তু যদি চারটে মোজা নিতাম। তাহলে তো আর সবগুলো মোজা আলাদা আলাদা রঙের হতে পারত না, কারণ রং তো আছেই মোটে তিনটে! সুতরাং অন্ততঃ একজোড়া থকতই যারা একই রঙের। সেটাই তো দরকার ছিল। সুতরাং উত্তর হল 4.
এর সঙ্গে pigeon hole principle-এর সম্পর্ক কি? এখানে রং তিনটে যেন তিনটে পায়রার খোপ, আর যে চারটে মোজা বার করলে, তরা যেন চারটে পায়রা। একই খোপে একধিক পায়রা ঢোকা মানে হল অন্ততঃ এক জোড়া মোজাথাকবেই যরা একই রঙের। ■

তবে এরকম অংকে পায়রা-টায়রা ইত্যদি কল্পনা না করে সহজ বুদ্ধিতে এগোনোই ভালো। যদি মাথা গুলিয়ে যায় তবে, ব্যাপারটাকে একটা খেলা বলে ভাবতে পারো। খেলাটা হচ্ছে তোমার সাথে নিয়তির। তুমি একটা করে মোজার জন্য হাত বাড়াচ্ছ, আর নিয়তি যেন তোমার হাতে একটা করে মোজা তুলে দিচ্ছে। এখানে নিয়তি যেন জানে যে তোমার উদ্দেশ্য হল ঠিকঠাক এক জোড়া মোজা পাওয়া এবং সেই উদ্দেশ্য ব্যর্থ করতে নিয়তি বদ্ধপরিকর। তুমি দেখবে কখন নিয়তির পক্ষে আর লড়াই চালানো সম্ভব নয়। যেমন ধরো যেই তুমি একটা মোজা চাইলে নিয়তি তোমার জন্য একটা লাল মোজা বরাদ্দ করল। দ্বিতীয় মোজার বেলায় অবশ্যই নিয়তি তোমাকে অন্য লালটা দেবে না, কারণ তাহলে তো তোমার উদ্দেশ্য সিদ্ধ হয়ে যাবে, এবং নিয়তির তো সেটা অভিপ্রায় নয়। অতএব এবার তোমার জন্য বরাদ্দ হল ধরো একটা নীল মোজা। তৃতীয় ধাপে একই কারণে নিয়তি তোমাকে লাল বা নীল কোনোটাই আর দেবে না, তখন দেবে সবুজ। কিন্তু চতুর্থ ধাপে নিয়তির হাত পা বাঁধা। এবার যেই রঙই দিক না কেন কোনো একটা রঙের জুড়ি মিলে যেতে বাধ্য।
এইভাবে চিন্তা করে নীচের অংক দুটোর উত্তর দাও তো।

Exercise 32: একটা বাক্সে 5-টা লাল বল, 7-টা নীল বল, আর 10-টা সবুজ বল আছে। অন্ধকারে মধ্যে হাত চালিয়ে কম পক্ষে কতগুলো বল নিলে তুমি নিশ্চিত হতে পারো যে প্রত্যেকটা রঙের অন্ততঃ একটা বল তুমি পাবেই?

HINT:
শুরুটা একটু ধরিয়ে দিচ্ছি। নিয়তির উদ্দেশ্য হল তোমার হাতে রঙের বৈচিত্র কম রাখা, মানে এক রঙের বলই যথাসম্ভব ঠেসে দেওয়া। যেহেতু সবচেয়ে বেশী আছে সবুজ রঙের বল, অতএব নিয়তি যতক্ষণ সম্ভব তোমাকে খালি সবুজ বলই সরবরাহ করে যাবে। এবার চিন্তা করে করে এগোও। ■

Exercise 33: আবার একই বাক্স দিলাম। এবার তোমার কাজ হল কোনো একটা রঙের সবগুলো বল হস্তগত করা। কোন রং সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়, খালি সেই রঙের সব বলই যেন তোমার হাতে থাকে। সবচেয়ে কম কটা বল নিলে সেটা নিশ্চিত করা যাবে? ■

11.3 ছদ্মবেশী অংক

ধরো তোমার কাছে 3-টে আপেল আছে, আমি আরও 2-টো দিলাম। মোট কটা হল? অবশ্যই 5-টা! যদি আপেলের বদলে কমলালেবু থাকত? মানে 3-টে কমলা ছিল, তার পরে আরও 2-টো পেলে, মোট কটা কমলা হল? উত্তর অবশ্যই 5-টা কমলা। শুধু কমলা কেন, ন্যাসপাতি, খেজুর, আনারস, এমনকি বোম্বাই আমের ক্ষেত্রেও ব্যাপরটা একই থাকবে। এ আমরা সবাই জানি--এখানে জিনিসটা কি সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়, গুরুত্বপূর্ণ হল $3 + 2 = 5$. ফলের নামটা বহিরঙ্গ মাত্র। এটা সহজ উদাহরণ ছিল, তাই বহিরঙ্গটা সরিয়ে অংকটার প্রকৃত রূপটা খুঁজে পেতে অসুবিধা হয়নি। কিন্তু কোনো কোনো অংকের বেলায় বহিরঙ্গটা বদলে দিলে এমন ধাঁধা লেগে যায় যে,মনে হয় এটা বুঝি সম্পূর্ণ নতুন কিছু। এরকম কয়েকটা অংক এবার দেব।
প্রথম অংকটা KVPY (2010)-র একটা অংকের অংশ।

Example 28: In how many ways can you choose three vertices from the seven vertices of a regular 7-sided polygon such that they form the vertices of an isosceles triangle? **(KVPY.2010 (part))**

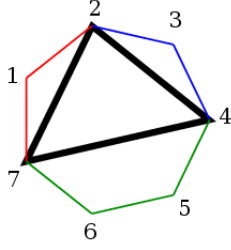



Fig 33

1	-1	1	1
-1	1	-1	-1
-1	1	1	1
-1	1	1	1

Fig 34

SOLUTION: প্রথমে একটা উদাহরণ নিই ছবি এঁকে (Fig 33)। ত্রিভুজটার ফলে 7-টা বাহু তিনটে দলে ভাগ হয়ে গেছে যাদেরকে তিনটে রঙে আলাদা করে দেখিয়েছি। যেহেতু ত্রিভুজটা সমদ্বিবাহু,তাই লাল আর নীলের সংখ্যা সমান, ধরো a-খানা করে। যদি সবুজের সংখ্যাকে b নাম দিই, তবে $2a + b = 7$ হবে। সুতরাং b একটা odd (বিজোড়) সংখ্যা হতে বাধ্য। সুতরাং b হতে পারে $1, 3$ বা 5. এবার লক্ষ কর যে একটা ত্রিভুজকে বোঝানোর জন্য খালি দুটো তথ্যই যথেষ্ট--B কোথায় আর b কত। সুতরাং ত্রিভুজের গল্পর বহিরঙ্গ ভুলে গিয়ে অংকটা এখন দাঁড়াচ্ছে এই--কতভাবে একটা vertex নেওয়া যায় B, এবং কতভাবে একটা $b \in \{1, 3, 5\}$ নেওয়া যায়? এবার তো উত্তরটা বুঝতেই পারছ, $7 \times 3 = 21$. ■

Exercise 34: In how many ways can you choose three vertices from the 11 vertices of a regular 11-sided polygon (with labelled vertices) such that they form the vertices of an isosceles triangle? ■

এবার দেখি তোমাকে হোঁচট খাওয়াতে পারি কিনা।

Exercise 35: In how many ways can you choose three vertices from the 15 vertices of a regular 15-sided polygon such that they form the vertices of an isosceles triangle? ■

এবার আরো কিছু অংক দিই। অংকগুলো দেখলে হয়তো নতুন লাগবে। কিন্তু এদের জন্য যা কায়দা দরকার সবই আমরা এই বইতে ইতিমধ্যেই করেছি। দ্যাখো বহিরঙ্গের আবরণ সরিয়ে তুমি কায়দাগুলো চিনতে পারো কিনা। প্রথমে নিজে নিজে চেষ্টা করো। না পারলে এখনই উত্তর দেখে নিও না, একটু পরে কিছু hint দেব। প্রতিটা অংকের ক্ষেত্রেই কায়দাটা চিনতে পারলে মনে মনেই করে দিতে পারবে।
নীচের অংকটা কোনো বার ISI-এর পরীক্ষায় এসেছিল। প্রশ্নটা হাতের কাছে নেই, নিজের ভাষায় দিলাম।

Exercise 36: Fig 34-এ একটা 4×4 সাইজের ছক কাটা আছে, তার প্রতিটা ঘরে 1 অথবা -1 বসাতে হবে। এমনভাবে করতে হবে যাতে প্রতিটা row আর column-এর সংখ্যাগুলোর গুণফল হয় -1. একটা উদাহরণ দেখানো আছে Fig 34-এ। এরকম মোট কতভাবে করা যাবে? ■

এই অংকটা কঠিন লাগা অসম্ভব নয়, কিন্তু নীচের অংকটা না পারলে বুঝব তুমি উদাহরণ নিয়ে চিন্তা করছ না।

Exercise 37: আগের অংকটাই, খালি এবার ছকটা 4×5 সাইজের। ■

পরের প্রশ্নটাও কোনো এক ISI admission test-এ এসেছিল। স্মৃতি থেকে দিচ্ছি, সংখ্যাগুলো একটু এদিক-ওদিক হতে পারে।

Exercise 38: 1 থেকে 45 পর্যন্ত যত integer আছে তাদের থেকে 10 জনকে নিতে হবে, এমনভাবে যাতে কোনো পরপর সংখ্যা না নেওয়া হয়। কতভাবে করা যাবে? ■

Fig 35

এরই অনুকরণে নীচের অংকটা বানিয়েছি।

Exercise 39: How many k-sided polygons can be inscribed in a regular polygon with n sides (and labelled vertices) if no side of the original polygon is used? ■

এবার hint-গুলো দিই। 4×4 ছকের অংকে এটা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ যে প্রতিটা row আর column-এই বিজোড়-সংখ্যক -1 থাকতে হবে। এবার তুমি উপরের বাঁদিকের 3×3 অংশটার দিকে তাকাও (Fig 35)। যদি ওখানে যা খুশি 1 আর -1 বসাই, তবে বাকি ঘরগুলোয় কি তুমি কায়দা করে পূর্ণ করে বিজোড় সংখ্যক -1 রাখার শর্তটা পালন করতে পারবে?
4×5-এর ভাবো তো মোট -1-এর সংখ্যা even নাকি odd? Row-এর দিক দিয়ে দেখলে প্রতিটা row-তে odd-সংখ্যক -1, এবং row আছে চারটে। সুতরাং -1 আছে even-সংখ্যক।
1 থেকে 45-র অংকে সবগুলো সংখ্যাকে এক লাইনে কল্পনা করো। এবার ধরো প্রতিটা সংখ্যার উপরে টিক বা ক্রস চিহ্ন দিচ্ছ, নির্বাচিত হলে টিক, নইলে ক্রস। তার মানে অংকটা দাঁড়াচ্ছে কিছু বিশেষ শর্ত মেনে টিক আর ক্রস চিহ্ন বসানোর।
Polygon-এর অংকটাও একইরকম, k-খানা বাহুওয়ালা polygon-টার vertex-গুলোয় টিক, আর বাকিগুলোয় ক্রস। কতভাবে করা যায়? তবে এখানে প্যাঁচটা একটু বেশী। দুটো কেসে ভেঙে এগোও--এক, যখন 1 নম্বর vertex-এ টিক, আর দুই, যখন সেটাতে ক্রস।

11.4 প্যাঁচ না থাকার প্যাঁচ

এই বইতে আমরা নানারকম কায়দাকানুন শিখেছি। তবে বারবারই বলছি যে একটা নতুন অংক হাতে পেলে প্রথমে সব কায়দাকানুন ভুলে সহজ বুদ্ধিতে খানিকক্ষণ চেষ্টা করাই ভালো। কিছু কিছু অংক আছে যেগুলো সিলেবাসের কোনো কায়দাতেই আসে না, সহজ বুদ্ধিতেই করা যায়। কিন্তু ছাত্রছাত্রীরা অনেক সময়ে সেই অংকগুলোতেই সবচেয়ে বেশী খাবি খায়, প্যাঁচ কষে কষে অভ্যাস এমন খারাপ হয়ে যায় যে প্যাঁচ না থাকলেই তারা প্যাঁচে পড়ে যায়! নীচের কয়টা অংক সেই জাতের।

Example 29: In a certain test a_i students gave wrong answers to at least i questions, where $i = 1, 2, ..., k$. No student gave more than k wrong answers. The total number of wrong answers given is ... . **(IIT,1982)**

SOLUTION:

> Let n_i be the number of students giving exactly i wrong answers. Then we want to find $\sum in_i$.
> Now $a_k = n_k,\ a_{k-1} = n_{k-1} + n_k,$ etc.
> So $\sum a_i = n_k + (n_{k-1} + n_k) + \cdots + (n_1 + \cdots + n_k) = \sum in_i$.
> Hence the required answer is $\sum a_i$.

■

Example 30: mn squares of equal size are arranged to form a rectangle of dimension m by

n where m and n are natural numbers. Two squares will be called 'neighbours' if they have exactly one common side. A natural number is written in each square such that the number written in any square is the arithmetic mean of the number written in its neighbouring squares. Show that it is possible only if all the numbers used are equal. **(IIT,1982)**

SOLUTION:

> Let M be the largest number. We shall show that all the numbers must be M.
> Since M is the largest number, there is some square with the number M.
> Consider its neighbouring numbers. These numbers are all $\leq M$ (since M is the maximum number). Also their arithmetic mean is M.
> So all those numbers must also be M.
> By repeating the same arguement the neighbours of these neighbours must also be M, and so on.

■

Example 31: The sum of all absolute values of the differences of the numbers $1, 2, 3, ..., n$ taken two at a time *i.e.*,

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |i - j|$$

equal (A) $\binom{n-1}{3}$ (B) $\binom{n}{3}$ (C) $\binom{n+1}{3}$ (D) $\binom{n+2}{3}$. **(KVPY.SB/SX.2011)**

SOLUTION:

> There are exactly $n - 1$ cases where $|i - j| = 1$.
> There are exactly $n - 2$ cases where $|i - j| = 2$.
> In general, there are exactly $n-k$ cases where $|i-j| = k$ for $k = 1, ..., n-1$.
> So the sum is
>
> $$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = n \sum_{1}^{n-1} k - \sum_{1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \cdots = \binom{n+1}{3}.$$

■

Example 32: Consider the square of an 8×8 chess board filled with the numbers 1 to 64 as in the figure below. If we choose 8 squares with the property that there is exactly one from each row and exactly one from each column, and add up the numbers in the chosen squares, show that the sum obtained is always 260.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

(BST-BMT2013)

SOLUTION:

> We notice that the number in the i-th row and j-th column is $8(i-1)+j$, where $i, j \in \{1, ..., 8\}$.
> Thus if we choose the numbers in the positions
>
> $$(i_1, j_1), ..., (i_8, j_8),$$
>
> then $i_1, ..., i_8$ must be a permutation of $1, ..., 8$. Similarly, $j_1, ..., j_8$ must also be a permutation of $1, ..., 8$.
> So the sum is
>
> $$8(i_1-1)+j_1+\cdots+8(i_8-1)+j_8 = 8(i_1+\cdots i_8)-64+(j_1+\cdots+j_8) = \frac{9\times 8\times 9}{2}-64 = 260,$$
>
> as required.

■

Answers

1. কোনোটার মতই নয়। **2.** $9!/3$. **3.** $4!$. **4.** $6!$. **5.** $5! \times {}^6P_4$. **6.** $4!/2$.
7. $a = 6, \quad b = 4, \quad c = 6 \times 4 = 24, \quad d = \frac{6!}{24} = 30$. **8.** $\frac{6!}{2\times2\times2} = 120$. **9.** $6!$. **10.** $7! \times 5!$.
11. $\frac{9!}{2} - 8!$. **12.** $\frac{8!}{5!3!} = 56$. **13.** $\frac{5!}{2!3!}\left[1 + \frac{6}{1!} + \frac{6\times7}{2!}\right]$. **14.** $\frac{9!}{2!3!4!} - \frac{8!}{1!3!4!}$. **15.** ${}^{11}C_5$.
16. $a = 5, b = 5!, \ c = 7, \ d = \frac{7!}{2!} = 21 \times 5!, \ e =^5 C_3, \ f = 2!, g =^4 C_2, h = 2!,$
$i =^5 C_3 \times 2! \times^4 C_2 \times 2! = 240$. **17.** শব্দগুলো হল A[C,C,L,U,L,U,S] (সংখ্যায় এরা $\frac{7!}{2!2!2!}$) CAC[L,U,L,U,S] (সংখ্যায় এরা $\frac{5!}{2!2!}$) CALCL[U,U,S] (সংখ্যায় এরা $\frac{3!}{2!}$) CALCS[U,L,U] (সংখ্যায় এরা $\frac{3!}{2!}$) CALCULS[U] (সংখ্যায় 1), এবার সব যোগ করে দাও। **18.** A[W,S,P]: 3!, P[S,W,A]: 3!. সুতরাং SWAP আছে $3! + 3! + 1 = 13$ নম্বর স্থানে। **19.** ${}^{19}C_4$. **20.** ${}^{(20-5)-1}C_4$,প্রথমেই সবাইকে একটা করে দিয়ে শুরু কর। **21.** ${}^{(30-1-2-3)-1}C_3$. **22.** ${}^{12}C_2$. **23.** ${}^{34}C_4 - {}^{29}C_4$. **24.** ${}^{(12-2-3)+2}C_2$. প্রথমে রাজামশাইকে 2-টো আর সুয়োকে 3-টে দিয়ে শুরু কর। **25.** ${}^7C_3$. প্রতিটা সংখ্যার চারগুণ পরবরতী সংখ্যার চেয়ে ছোটো,তাই বিভিন্নভাবে সংখ্যা নিলে যোগফলগুলো আলাদা আলাদা হবে। সংখ্যা চারটেকে কমা দিয়ে আলাদা করে লেখো, যতবার একটা সংখ্যা নিচ্ছ ততগুলো ফুট্‌কি বসাও। যেমন $1, 56, 1, 12340$ নিলে ••,•,,•. **26.** অন্ততঃ-দুটো-চকোলেট-পাওয়া দুজনকে নির্বাচন কর। তাদেরকে দুটো করে, এবং বাকিদেরকে একটা করে চকোলেট দিয়ে দাও। অবশিষ্ট $20 - 2 \times 2 - 6 = 10$-টা চকোলেট ভগ করে দাও সেই দুজনের মধ্যে। উত্তর হবে 308. **27.** অসম্ভব! **28.** ${}^9C_4{}^9C_3$. **29.** ${}^{17}C_8$. **30.** ${}^{18}C_8 - 9$. এখানে 9 বিয়োগ করতে হল কারণ 10 তো একটা digit হতে পারে না! তাই য সব partition-এ 10 থাকবে সেগুলো বাদ যাবে। এরকম ঠিক 9-টাই আছে। **31.** 150. **32.** $10 + 7 + 1$. **33.** $(5 - 1) + (10 - 1) + (7 - 1) + 1$.

34. $11 \times 5 = 55$. **35.** $15 \times 6 + 5$. এখানে 15 যেহেতু 3 দিয়ে ভাগ যায় তাই equilateral (সমবাহু) ত্রিভুজ সম্ভব। 15×6 হল সেই সব isoceles ত্রিভুজ যারা equilateral নয়, আর $\frac{15}{3} = 5$ হল equilateral-দের সংখ্যা।
36. $2^9 = 512$. **37.** অসম্ভব! **38.** ${}^{46}C_{10}$. **39.** ${}^{n-k-1}C_{k-1} + {}^{n-k}C_k$.

Index